

# Analisis Temporal de Sistemas Lineales PS2315 (versión2)

Prof. José Ferrer  
Departamento de Procesos y Sistemas  
Universidad Simón Bolívar

Abril-Julio2012

## Abstract

En estas notas se presentan las descripciones generales de los problemas de control. Se inicia el proceso de evaluación de desempeño de sistemas de control con el análisis de la respuesta temporal empleando tanto técnicas en variables de estados (adecuada para cálculos computacionales) como las frecuenciales. Se hará énfasis en el uso de estas últimas ya que ellas son más sencillas y permiten entender fácilmente cómo se puede mejorar el desempeño de los sistemas lineales.

## 1 Análisis de Sistemas Lineales de Control

Un sistema de control es un sistema dinámico el cual se comporta de una manera prescrita a manera que transcurre el tiempo sin la intervención humana. La teoría de control se ocupa del análisis y diseño de los sistemas de control.

Los componentes esenciales de un sistema de control (ver figura(1)) son: a) La *planta*, la cual es el sistema cuyo comportamiento se desea modificar o controlar; b) uno o mas *sensores*, los cuales recopilan información sobre la planta; y c) el *controlador*, el corazón del sistema de control y es aquella unidad que compara los valores actuales de las variables medidas o salidas) con los valores deseados (valores de referencia) y ajusta los valores de las entradas a la planta con el objeto de corregir cualquier desviación encontrada. Un ejemplo bastante conocido de un sistema de control es el sistema de aire acondicionado de una oficina, el cual mantiene todo el tiempo la temperatura interior del inmueble en un valor constante a pesar de las variaciones en temperatura externa, la pérdida de calor a través de las paredes, la apertura de puertas y ventanas, etc. El sistema es automático en el sentido que en la regulación de la temperatura no interviene la mano humana excepto en el establecimiento de la temperatura deseada. Aquí la planta es la infraestructura física de la oficina y el acondicionador de aire.

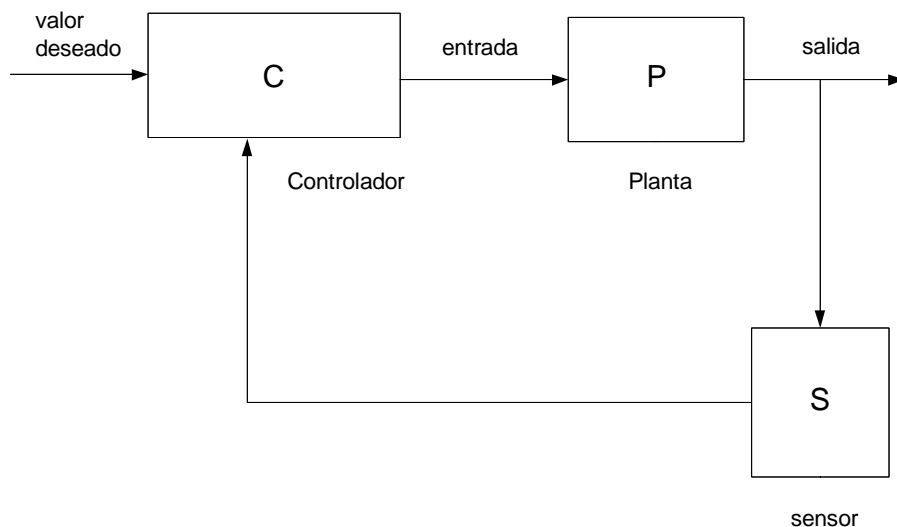


Figure 1: Representación esquemática de un sistema de control

El sensor es generalmente un transductor en el interior de la oficina y muchas veces complementado con otro transductor de temperatura colocado fuera de inmueble. El controlador, en muchos casos, está integrado al sensor interno de la temperatura constituyendo el conocido termostato, el cual enciende o apaga el equipo de enfriamiento cuando sea necesario.

En el ejemplo dado, la planta y el controlador pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales (modelo en variables de estados). En consecuencia, las herramientas matemáticas necesarias para analizar el comportamiento de un sistema de control consiste en aquellos propios de la teoría de sistemas. Note también el uso de la retroalimentación por parte del controlador en el sentido que se emplea la desviación entre la temperatura deseada y la actual en la oficina

$$e(t) = T_{des} - T_{in}(t)$$

y dependiendo del signo se prende o apaga el sistema de enfriamiento hasta que  $e(t) \approx 0$ .

La retroalimentación o realimentación tiene interesantes características, debido a que las acciones de control se realizan de acuerdo a las desviaciones de la operación deseada, el controlador puede reaccionar y compensar las condiciones adversas tales como perturbaciones de carga (al abrir una puerta), cambios en los parámetros de la planta (deterioro en los aislantes térmicos, disminución de la potencia del compresor, etc).

En estas notas, definiremos con más precisión los problemas básicos de control (seguimiento y regulación) y comenzaremos a evaluar el desempeño de sistemas lineales controlados o no. .

## 1.1 Descripción de la Planta

Un sistema de control puede basicamente considerarse cosntituido por dos partes importantes, la planta a ser controlada y la unidad de control (llamado controlador).

Una planta puede ser toda una facilidad técnica controlada o un más simple sistema de control. En este último caso, se habla de un conrol jerarquizado, donde un sistema maás complejo de control incorpora auno más simple o a un subsistema como una planta. Estos sistemas elementales son generalmente sistemas de regulación.

El término regulación se refiere al proceso mediante el cual se mantiene una variable dada,  $y(t)$ , que caracteriza a la planta bajo estudio, en un valor deseado  $r(t) = R \in R$ , o mas generalmente al problema de seguimiento de esa variable  $y(t)$  a una señal de referencia  $r(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

En vista de lo anterior podemos decir que control es la implementación automática de un grupo de acciones (ley de control) seleccionado en un conjunto de acciones factibles,  $U$ , en base a data o información disponible de la planta  $P$ , con el fin u objetivo de mantener o mejorar el desempeño de la planta en cuanto a mantener el objetivo de control deseado (regulación o seguimiento).

Ahora bien, recuerde que la planta  $P$

$$P : U \rightarrow Y \text{ :} \longrightarrow y = P[u]$$

pero en general,

$$U \leftarrow U \times D \times N$$

donde

- $U$  es el conjunto de entradas o acciones de conrol factibles; o sea, un conjunto de variables externas a la planta que mediante su manipulación podemos modificar el comportamiento de la planta, aquí  $u(t) \in U$ .
- $D$  es el conjunto de perturbaciones de cargas; o sea, un conjunto de variables externas a la planta que a diferencia a las variables o señales de control no pueden ser en general medibles o manipuladas. En general, una perturbación  $d(t) \in D$  es una señal de baja frecuencia. Ejemplos de perturbaciones son ráfagas de viento en una antena, efectos de deriva en un oscilador, señales periodicas como la rensión de alimentación, etc.
- $N$  es el conjunto de señales de ruidos; o sea, un conjunto de variables externas que al igual que las perturbaciones no son controladas y su reducción siempre mejoran el desempeño de la planta. En general, las señales de ruido  $n(t) \in N$  son de alta frecuencia e impredecibles (naturaleza aleatoria o estocástica) y algunos ejemplos son los ruido de medición debido a sensores de baja calidad, ruidos inherentes a la planta (ruido térmico, ruido blanco), etc.

- $Y$  es el conjunto de señales de salida o variables observadas; o sea, un conjunto de variables asociadas a la planta que son medidas mediante sensores y que se emplean para obtener información sobre el estado de la planta, y están generalmente directamente contaminadas por ruidos de medición  $n \in N$ .
- $Z$  es el conjunto de variables controladas de la planta; o sea, un conjunto de variables que pueden ser o no variables asociadas con la planta que se quieren manipular o controlar y también se denominan salidas manipuladas,  $z \in Z$ .

Finalmente, también es importante resaltar que para la planta es sumamente importante un conjunto  $R$  de señales de referencia  $r(t)$  que representan los valores prescritos o deseados de la variable controlada  $z(t)$ . Estas señales aunque no actúan directamente sobre la planta determinarán a través de un controlador su comportamiento.

En la figura (2) se muestran a groso modo los diferentes tipos de señales externas ( $u, d, n$ ) que actúan sobre la planta y su distintas variables de salida ( $z, y$ ).

Es importante recalcar en el diagrama (2) hemos supuesto que el sensor que se emplea para medir la salida forma parte de la planta. En otras palabras, la planta  $P$  desagregada es la mostrada en la figura (3)

Lo anterior implica que nuestros modelos iniciales en variables de estados de la planta  $P$

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con  $u \in U$ ,  $y \in Y$ , y donde para cada  $t \in [0, \infty)$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^{n_u}$ ,  $y(t) \in R^{n_y}$ , deberán ser modificados. Afortunadamente, esto no tiene dificultad alguna y solo aplicamos una técnica que podemos llamar de "desagregación" de la entrada.

Si la planta  $P$  está sujeta a las entradas anteriores arriba mencionada, entonces la representación en variables de estado será:

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + [ B_u \quad B_d \quad 0 ] \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) = C^{(1)}x(t) + [ D_u \quad 0 \quad D_n ] \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \\ z(t) = C^{(2)}x(t) \end{cases}$$

o sea

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_d d(t), \\ y(t) = C^{(1)}x(t) + D_u u(t) + D_n n(t) \\ z(t) = C^{(2)}x(t) \end{cases}$$

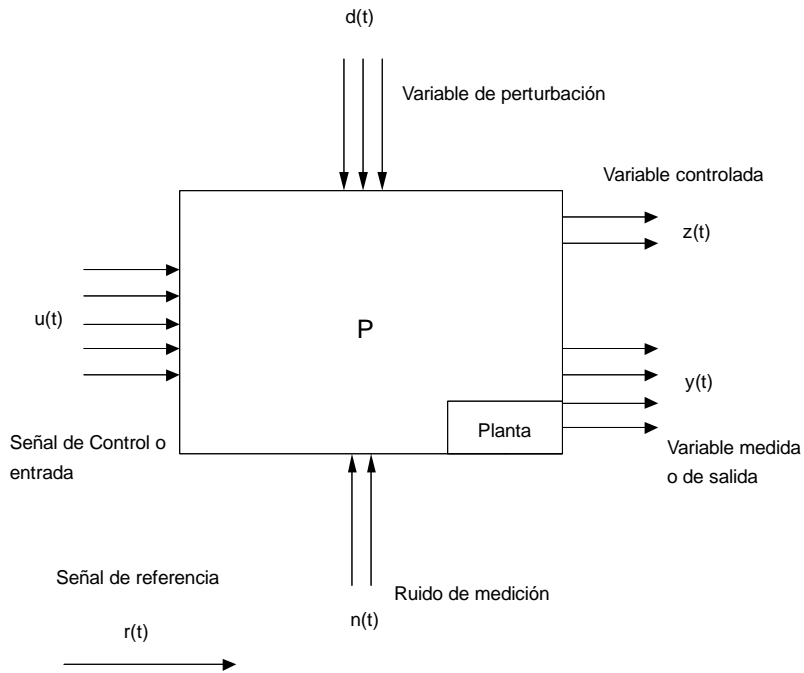


Figure 2: Planta P y sus distintas entradas y salidas

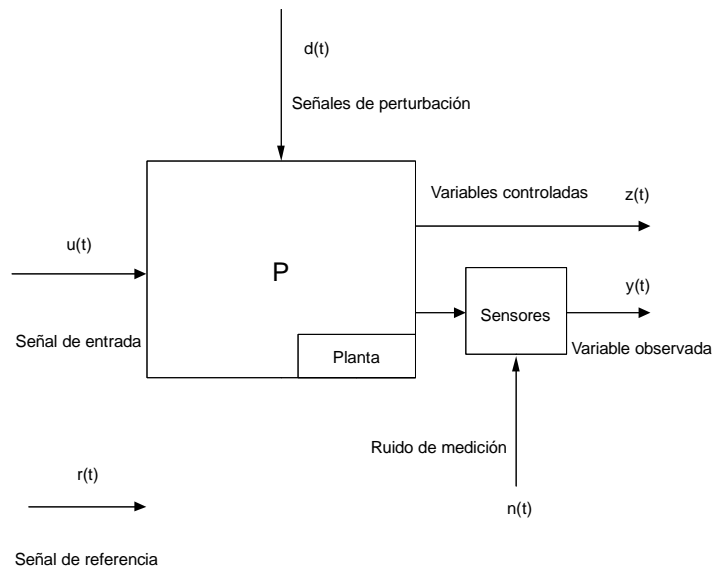


Figure 3: La planta P

donde  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B_u \in R^{n \times n_u}$ ,  $B_d \in R^{n_d}$ ,  $C \in R^{n_y \times n}$  y  $D \in R^{n_y \times n_u}$ ,  $D_n \in R^{n_y \times n_n}$ , y se representa por

$$P : \begin{bmatrix} A & B_u & B_d & 0 \\ C^{(1)} & D_u & 0 & D_n \\ C^{(2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_x^n$$

**Remark 1** *Noten que todo lo desarrollado hasta ahora no cambia en absoluto con los siguientes cambios o asignaciones*

$$\begin{aligned} u &\leftarrow \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \\ y &\leftarrow \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} A &\leftarrow A, & B &\leftarrow \begin{bmatrix} B_u & B_d & 0 \end{bmatrix} \\ C &\leftarrow \begin{bmatrix} C^{(1)} \\ C^{(2)} \end{bmatrix} & D &\leftarrow \begin{bmatrix} D_u & 0 & D_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Example 2** *(Tanque hidráulico) Considere en primer lugar, la planta sencilla  $P$  mostrada en la figura (4)-a. La acción de control  $u$  es el caudal entrante de agua  $Q$  al tanque, la variable controlada  $z$  es el nivel o altura  $H$  del agua en el tanque, y la perturbación externa  $d$  es el caudal de agua  $G$  saliente del tanque. En este caso, la variable controlada  $z$  coincide con la salida o variable medida  $H$ . Por lo tanto,*

$$u = Q, \quad y = z = H, \quad d = H.$$

*Suponemos que no hay ruido de medición aunque en la práctica esto es bastante irreal ya que el la medición de la altura del líquido es muy ruidoso debido a la formación de olas en la superficie del líquido.*

*La ecuación fundamental del sistema  $P$  se halla mediante la ley de conservación de las masas:*

$$\frac{d}{dt}V(t) = Q(t) - G(t)$$

*donde  $V$  es el volumen de agua acumulado en el tanque y el cual está dado por*

$$V(t) = SH(t)$$

*con  $S$  es el area transversal del tanque que se asume constante.*

*Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{1}{S}u(t) - \frac{1}{S}d(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

y la representación en variables de estados será

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= 0 \cdot x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & -\frac{1}{S} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= [1]x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \\ z(t) &= [1]x(t)\end{aligned}$$

Interesante observar que el sistema a pesar de tener una sola entrada  $u$ , una sola perturbación  $d$  es básicamente un sistema multivariable.

Considere ahora el sistema  $P_{int}$  consistente en dos tanques hidráulicos como lo que se muestra en la figura (4)-b. Las ecuaciones dinámicas de esta planta son

$$\begin{aligned}S_1 \frac{d}{dt}H_1(t) &= Q_1(t) - G_1(t) - Q_{12}(t) \\ S_2 \frac{d}{dt}H_2(t) &= Q_2(t) - G_2(t) + Q_{12}(t)\end{aligned}$$

donde

$$Q_{12}(t) = f(H_1(t) - H_2(t))$$

es en general una función no-lineal de la diferencia de alturas  $H_1(t) - H_2(t)$ ; sin embargo, supondremos que

$$Q_{12}(t) = R_{12}^{-1}(H_1(t) - H_2(t))$$

donde  $R_{12}$  es la resistencia fluidica de la tubería que conecta al tanque (1) con el tanque (2).

Por lo tanto, defina como vector de estados a  $x(t) = [H_1(t) \ H_2(t)]^{Tr}$ , la señal de control es  $u(t) = [Q_1(t) \ Q_2(t)]^{Tr}$ , la perturbación es  $d(t) = [G_1(t) \ G_2(t)]^{Tr}$ , la salida y la variable controlada coinciden; o sea,  $z(t) = y(t) = [H_1(t) \ H_2(t)]^{Tr}$ . Por lo tanto, las ecuaciones de estados del sistema  $P_{int}$  son

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1 R_{12}} & \frac{1}{S_1 R_{12}} \\ \frac{1}{S_2 R_{12}} & -\frac{1}{S_2 R_{12}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S_2} \end{bmatrix} d(t) + 0 \cdot u(t) \\ y(t) &= x(t) + 0 \cdot u(t) + 0 \cdot d(t) + 0 \cdot n(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 0 \cdot u(t) + 0 \cdot d(t) + 0 \cdot n(t)\end{aligned}$$

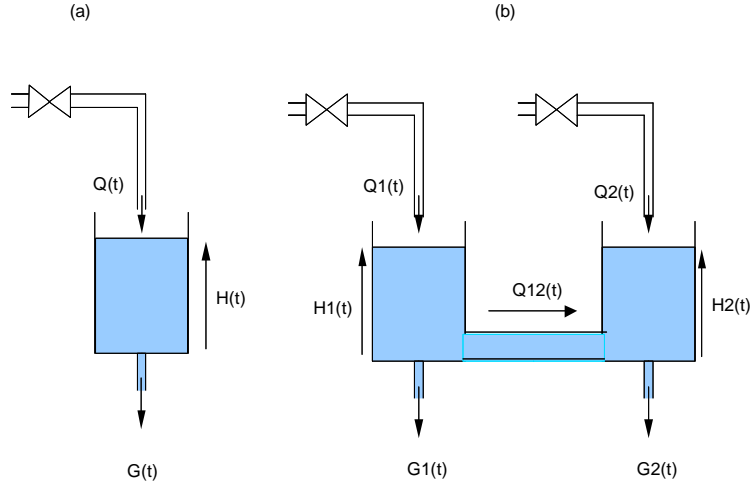


Figure 4: a) Planta: Tanque simple, b) Planta: tanques interconectados.

Por lo tanto,

$$P_{int} : \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1 R_{12}} & \frac{1}{S_1 R_{12}} & \frac{1}{S_1} & 0 & -\frac{1}{S_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{S_2 R_{12}} & -\frac{1}{S_2 R_{12}} & 0 & \frac{1}{S_2} & 0 & -\frac{1}{S_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_x^2$$

Ahora bien, si una planta  $P$  escalar y descrita por

$$P : \begin{bmatrix} A & B_u & B_d & 0 \\ C^{(1)} & D_u & 0 & D_n \\ C^{(2)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_x^n$$

con vector de entrada  $(u^{Tr}, d^{Tr}, n^{Tr})^{Tr}$ , y con salidas  $(y^{tr}, z^{tr})^{Tr}$ . Si la planta  $P$  está inicialmente relajada ( $x(0) = x_0 = 0$ ) y si se cumplen las condiciones siguientes

- el par  $\{A, B_u\}$  es estabilizable,
- el par  $\{A, C\}$  es detectable,

las cuales garantizarían que no se cancelan polos y cero inestables en el cálculo de las diferentes funciones de transferencia. Entonces según el teorema sobre descomposición canónica de sistemas de Kalman, podemos representar la



planta  $P$  en el dominio frecuencial a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= G_P(s) \hat{u}(s) + G_d(s) \hat{d}(s) + G_n(s) \hat{n}(s) \\ \hat{z}(s) &= G_{ps}(s) \hat{u}(s)\end{aligned}$$

donde

$$G_P(s) = \left. \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \right|_{\hat{d}, \hat{n}=0} \quad G_d(s) = \left. \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\hat{u}, \hat{n}=0} \quad G_n(s) = \left. \frac{\hat{y}(s)}{\hat{n}(s)} \right|_{\hat{u}, \hat{d}=0}$$

y cada una de esas funciones de transferencia son funciones racionales reales

$$G_P(s), G_d(s), G_n(s), G_{ps}(s) \in R(s)$$

mucho mas manejables que las respectivas representaciones en variables de estados.

Pero siempre es importante resaltar que independiente de modelo de la palnta que se use, la estrategia de control que se implemente deberá enfrentar los retos siguientes:

- a) Las perturbaciones de carga  $d(t)$  influyen de manera impredecible a la planta,
- b) No se conocen con antelación las señales de entrada o de control  $u(t)$ ,
- c) Las señales de ruido  $n(t)$  son estocásticas.

## 1.2 Formulación de los Problemas de Regulación y Seguimiento

A continuación se formulan dos problemas de control fundamentales en la práctica y teoría de los sistemas dinámicos de control: a) el problema de seguimiento y como un caso especial el de regulación, b) problema de control terminal.

Dado un sistema o una  $P$  la cual **no puede ser modificada** por el ingeniero de control o procesos, con las variables asociadas en la figura (3).

El **problema de seguimiento** se puede definir ligeramente como "Dada una señal de referencia  $r \in R$ , encuentre una señal adecuada de conrol  $u \in U$  tal que la variable controlada siga a la señal de referencia", o sea,

$$z(t) \approx r(t), t \geq t_0 \tag{1}$$

donde  $t_0$  es el instante en que el controlador o control comienza a operar sobre la planta. Generalmente, la **señal de referencia no se conoce con antelación**. Una restricción práctica es que el rango de los valores que puede asumir  $u \in U$  es limitado, o sea, si

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n_u}(t) \end{bmatrix} \in U$$

entonces existen constantes  $u_i^{\min}, u_i^{\max}, i = 1, 2, \dots, n_u$  tales que

$$u_i^{\min} \leq u_i(t) \leq u_i^{\max}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n_u$ . O lo que es lo mismo, para cada  $t \geq t_0$ ,

$$u(t) \in \prod_{i=1}^{n_u} [u_i^{\min}, u_i^{\max}]$$

Esta restricción sobre las entradas la impone la planta para garantizar márgenes de seguridad industrial y/o evitar saturaciones de válvulas, motores, amplificadores de potencia o elementos finales de control en general. Aumentar los rango de los valores  $u_i^{\min}, u_i^{\max}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_u$ , usualmente implica sustituir la planta por una mas grande y msa cara. Esta restricción es tan severa que evita que podamos diseñar sistemas de control que sigan perfectaemente una referencia dada.

Cuando se diseñan sistemas de seguimiento además se satisfacer la exigencia (1) es importante considerar los siguientes aspectos:

1. Las perturbaciones de carga influyen de manera impredecible a la planta,
2. Los parámetros de la planta (resistencias, inductancias, inercias, etc.) no se conocen con precisión o varían con el tiempo.
3. El estado inicial de la planta puede ser desconocido.
4. La variable observada o medida  $y(t)$  puede no dar información expresa o directa sobre el estado de la planta, y más aún puede estar contaminada con el ruido de medición.

La entrada a la planta será generada por un subsistema o equipo denominado controlador. Existen dos tipos básicos de controladores: controladores a lazo abierto y controladores a lazo cerrado (o por realimentación). Los controladores a lazo abierto generan o seleccionan una ley de control  $u \in U$  solamente en base a valores presentes y pasados de la señal de referencia  $r \in R$  dada. Esto es,

$$u(t) = \Psi_{la}(r_{[t_0, t]}), \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

y debe cumplirse que  $u \in U$ . Dicha estrategia de control se muestra en la figura (5)

Los sistemas de control a lazo cerrado además de emplear la información sobre la señal de referencia también explotan la información disponible sobre la planta a través de la variable observada o medida  $y(t)$ ; esto se representa mediante

$$u(t) = \Psi_{lc}(r_{[t_0, t]}, y_{[t_0, t]}), \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

con  $u \in U$ . (ver figura(6))

Noten que tanto en (2) como en (3) no se considerarán valores futuros de las señales de referencia o de la salida (variable observada) en la generación de la ley de control  $u$  ya que ellas se desconocen.

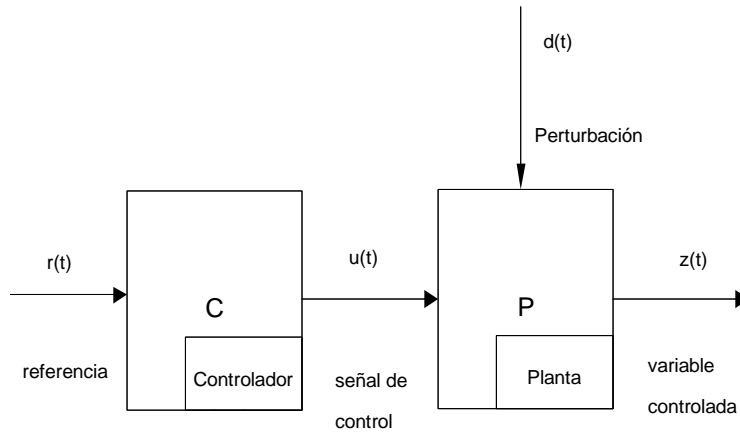


Figure 5: Un sistema de control a lazo abierto.

Aunque esto se constatará explícitamente más adelante, es evidente que los controladores a lazo cerrado son más poderosos que los de lazo abierto. Los controladores a lazo cerrado tienen "memoria" en el sentido que pueden acumular información sobre la planta durante la operación; en consecuencia, pueden encontrar información sobre el estado inicial  $x(t_0)$  de la planta  $P$ , reducir los efectos de las perturbaciones  $d$ , y compensar las variaciones en los parámetros de la planta por uso o envejecimiento. Por el contrario, los controladores a lazo cerrado no tienen acceso a este tipo de información sobre la planta excepto la que esté disponible antes de que inicien la operación. El hecho que los controladores a lazo abierto no sean sensibles al ruido de medición debido a que no usan información sobre la señal de salida  $y$ , no compensa sus deficiencias.

Una clase importante de los problemas de seguimiento consiste en aquellos problemas en los que la señal de referencia  $r(t)$  es constante sobre largos períodos de tiempo. En tales casos, se acostumbra a denominar "punto de operación" a la señal de referencia y hablamos de un problema de regulación. Por lo tanto, el principal objetivo del controlador es mantener la variable de salida o controlada en el punto de operación a pesar de la presencia de perturbaciones en el sistema.

Finalmente, una clase especial de problemas de control que constituyen una subclase de los problemas de seguimiento y regulación, es la constituida por aquellos donde: "dada una planta  $P$  con entrada  $u(t)$ , variable observada  $y(t)$ , perturbación  $d(t)$  y variable controlada  $z(t)$ , encuentre una señal  $u_{[t_0, t_f]}$  tal que

$$z(t_f) \approx r_{op}$$

donde  $r_{op}$  es un vector de referencia dado y el tiempo terminal o final  $t_f$  puede o no estar especificado". Estos problemas se denominan **problemas de control**

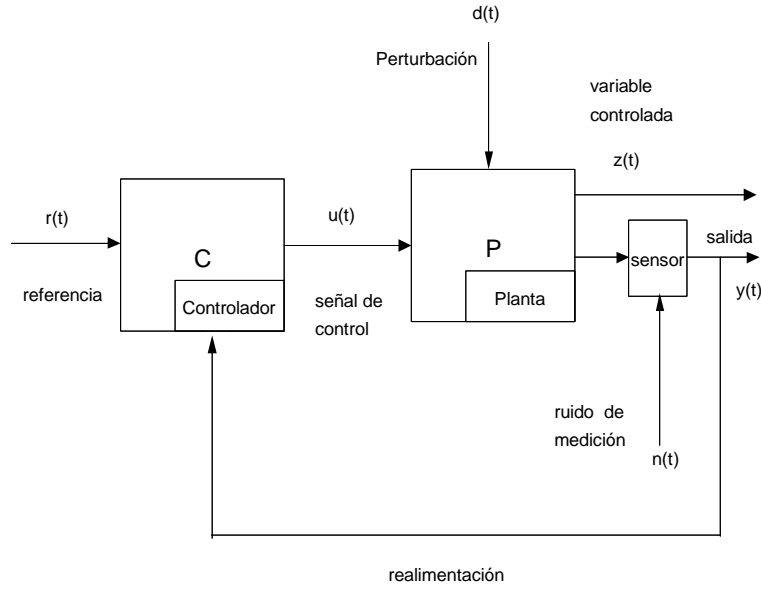


Figure 6: Un sistema de control a lazo cerrado

**terminal** y en ellos también está presente la severa restricción práctica sobre la limitación en el rango de los valores de  $u$ , o sea

$$u(t) \in \prod_{i=1}^{n_u} [u_i^{\min}, u_i^{\max}]$$

para todo  $t \in [t_0, t_f]$ .

**Example 3** (*Sistema: Tanque de Mezclado*) Considere el tanque de mezclado que se muestra en la figura (8) el cual es un sistema multivariable. El tanque se alimenta mediante dos caudales de líquido  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  que varían en el tiempo. Ambos flujos contienen material disuelto con concentraciones constantes  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente. El flujo de salida tiene está descrito por el caudal  $F(t)$ . Se supone que el mezclado es homogéneo tal que la concentración del líquido de salida es igual a la concentración del líquido en cualquier punto interior del tanque.

Las ecuaciones de masa para el tanque generan las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} V(t) = F_1(t) + F_2(t) - F(t)$$

$$\frac{d}{dt} [c(t) V(t)] = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) - c(t) F(t)$$

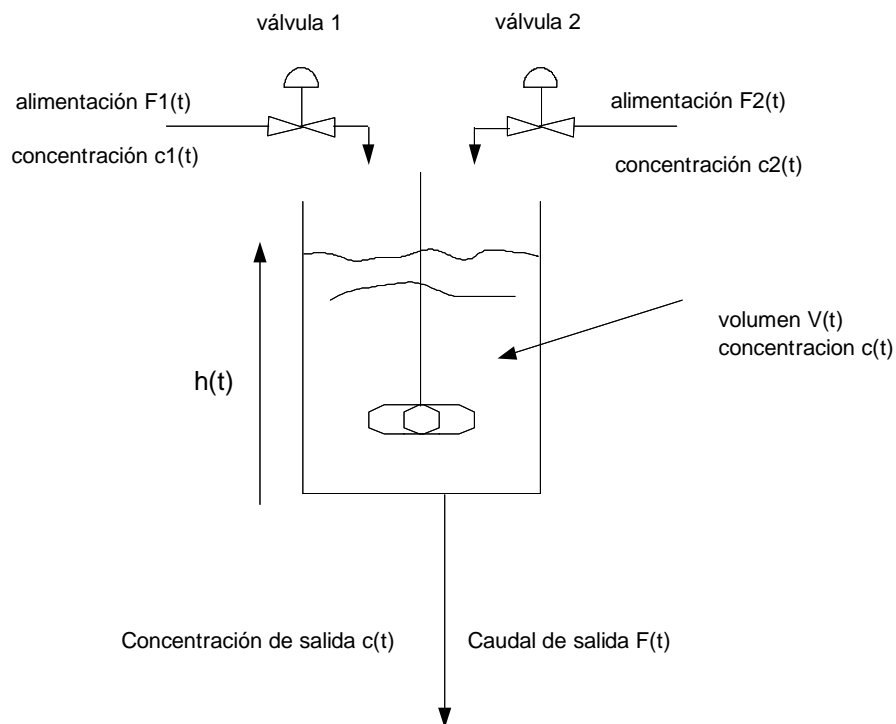


Figure 7: Un tanque de mezclado

donde  $V(t)$  es el volumen de fluido en el tanque. El caudal de salida  $F(t)$  depende de la altura del líquido en el tanque ya que

$$F(t) = k\sqrt{H(t)}$$

donde  $k$  es una constante experimental. Si el tanque tiene una sección transversal constante  $S$ , entonces  $V(t) = SH(t)$  y

$$F(t) = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}$$

y las ecuaciones de masa se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \\ \frac{d}{dt}[c(t)V(t)] &= c_1F_1(t) + c_2F_2(t) - c(t)k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \end{aligned}$$

las cuales son obviamente no-lineales.

Es necesario linealizar dichas ecuaciones alrededor de un punto de equilibrio o punto de operación (nuestros futuros valores de referencia) del sistema. Para eso, hacemos todas las variaciones iguales a cero y suponemos que las variables asumen valores constantes, y de esa manera obtenemos las ecuaciones en régimen permanente

$$\begin{aligned} 0 &= F_{10} + F_{20} - kF_0 \\ 0 &= c_1F_{10} + c_2F_{20} - c_0F_0 \\ F_0 &= k\sqrt{\frac{V_0}{S}} \end{aligned}$$

Suponga que se desea mantener un volumen fijo en el tanque  $V_0$  y el cual regularmente debe cumplir con un requisito de la forma

$$V_{\min} \leq V_0 \leq V_{\max}$$

para evitar que el tanque se desborde y poder cumplir que la concentración de salida sea igual a la del tanque en cualquier instante de tiempo  $t$ , y se desea también que la concentración del líquido de salida debe ser  $c_0$  para cumplir con ciertos requerimientos de un cliente dado. Entonces, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{\frac{V_0}{S}} \\ c_0k\sqrt{\frac{V_0}{S}} \end{bmatrix}$$

si las concentraciones de los fluidos entrantes son diferentes, entonces

$$\begin{bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\frac{c_0}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{1}{S}V_0} - k\frac{c_2}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{1}{S}V_0} \\ k\frac{c_1}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{1}{S}V_0} - k\frac{c_0}{c_1-c_2}\sqrt{\frac{1}{S}V_0} \end{bmatrix}$$

Suponga ahora que las desviaciones son pequeñas con respecto a las condiciones en régimen permanente. Y exprese

$$\begin{aligned} F_1(t) &= F_{10} + u_1(t) \\ F_2(t) &= F_{20} + u_2(t) \\ V(t) &= V_0 + x_1(t) \\ c(t) &= c_0 + x_2(t) \end{aligned}$$

las variables controladas serán

$$\begin{aligned} z_1(t) &= F(t) - F_0 \\ z_2(t) &= c(t) - c_0 \end{aligned}$$

mientras que las variables medidas u observadas

$$\begin{aligned} y_1(t) &= z_1(t) + n_F(t) \\ y_2(t) &= z_2(t) + n_c(t) \end{aligned}$$

donde  $n_F, n_c$  son los ruidos de medición que se introducen al medir el flujo y la concentración del fluido de salida.

Linealizando se obtienen las siguientes ecuaciones de estados (de las desviaciones)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1 - c_0}{V_0} & \frac{c_2 - c_0}{V_0} \end{bmatrix} u(t) + 0 \cdot d(t) + 0 \cdot n(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} n(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

El sistema de control que se plantea para este sistema es uno del tipo de realimentación de las salidas tal como se muestra en la figura (8). En dicho sistema, los flujos de entrada (las variables manipuladas) pueden ajustarse mediante la apertura o cierre de las respectivas válvulas. La concentración del material disuelto en cada uno de los caudales de líquido entrante son fijos y no pueden ser ajustados. El tanque tiene una tubería de extracción del fluido y el problema de control consiste en diseñar un equipo o controlador que ajuste automáticamente las válvulas de alimentación tal que se mantenga tanto el flujo como la concentración del fluido que se extrae a unos valores constantes de referencia ( $F_0 = k\sqrt{\frac{1}{S}V_0}, c_0$ ).

Este es un típico problema de regulación. Las componentes de la variable de entrada ( $u(t)$ ) son los caudales de entrada al tanque. Las componentes de la variable controlada ( $z(t)$ ) son el caudal y la concentración del fluido de salida, y ellas coinciden con las variables medidas sin embargo estas están contaminadas por ruido de los sensores. El punto de operación tiene dos componentes: el flujo de salida deseado y la concentración del líquido de salida. Es posible las siguientes perturbaciones: fluctuaciones en las concentraciones de los líquidos entrantes, fluctuaciones en los caudales de los fluidos entrantes como consecuencia de variaciones en las presiones previas a las válvulas, pérdida del fluido en el tanque por evaporación o fugas a través de las paredes, etc. para controlar el sistema es necesario medir tanto el flujo como la concentración del fluido de salida y ellas son las componentes de la variable observada o medida. Un controlador a lazo cerrado usa esas mediciones para calcular las desviaciones o error con respecto a los puntos de operación y generar las correspondientes señales eléctricas o neumáticas para ajustar las aperturas de las válvulas.

### 1.3 Respuesta Temporal de Sistemas Lineales

En el análisis temporal de sistemas dinámicos se calcula la respuesta del sistema bajo estudio ante una señal de tiempo dada siempre que la naturaleza y la

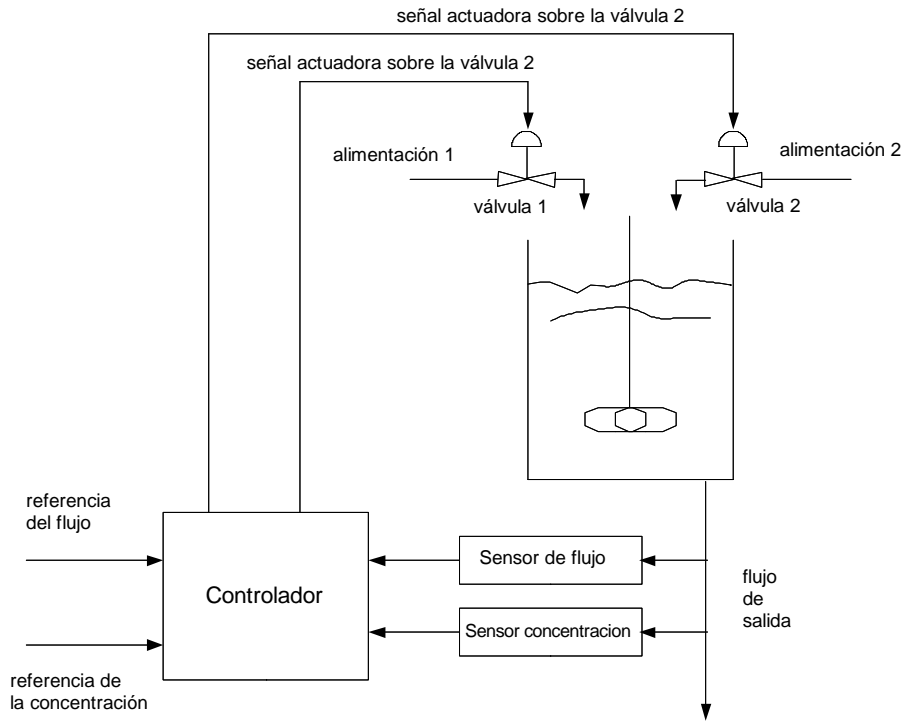


Figure 8: Sistema de Control del Tanque de Mezclado

descripción matemática de esta se conozca. Generalmente las señales de entrada a un sistema no se conocen con antelación. Un ejemplo ilustrativo de esto es el sistema de seguimiento de un radar, la posición y la velocidad del objetivo puede variar aleatoriamente. Lo que podemos hacer para evaluar el desempeño de un sistema dado es analizar su respuesta a entradas "típicas" o básicas

$$U_{test} = \{u^{(i)}(t) : i = 1, 2, \dots, N\}$$

donde cada  $u^{(i)}(t)$  representa o modela una característica o tendencia importante de la verdadera señal de entrada. En un primer estudio,  $N = 5$ , y las señales básicas son:

1. Impulso o delta Dirac:

$$u^{(1)}(t) = A\delta(t - \alpha)$$

con  $t \in [0, \infty)$ .

Esta señal modela o representa cambios o perturbaciones repentinas de magnitud  $A$  que ocurren en un período de tiempo muy corto alrededor



de un instante de tiempo  $\alpha \in [0, \infty)$ . El impulso es también importante desde el punto de vista teórico debido a que la respuesta  $y$  de un sistema  $P$  lineal, causal y de tiempo continuo ante una entrada  $u$  :

$$y(t) = P[u(t)]$$

está completamente especificada por su respuesta al impulso  $h(t)$ . Recuerde que si  $h$  se conoce, entonces

$$y(t) = P[u(t)] = \int_0^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

donde

$$h(t, \tau) = P[\delta(t - \tau)]$$

$t, \tau \in [0, \infty)$  es la respuesta a un impulso unitario que ocurre en  $t = \tau$ . Si  $P$  es además invariante en el tiempo, entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= P[u(t)] = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= h(t) * u(t) \end{aligned}$$

2. Escalón:

$$u^{(2)}(t) = A1(t - \alpha) = \begin{cases} A, & t > \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$$

con  $t \in [0, \infty)$ .

Esta señal representa un cambio repentino de magnitud  $A$  en un instante  $t = \alpha$  y se usa para modelar generalmente perturbaciones de "carga".

3. Rampa: La rampa es una señal que es cero para valores anteriores a un instante de tiempo  $\alpha$  y aumenta linealmente para  $t \geq \alpha$ . O sea,

$$u^{(3)}(t) = A(t - \alpha)1(t - \alpha)$$

Por lo tanto, una rampa está descrita por

$$u^{(3)}(t) = A(t - \alpha)1(t - \alpha) = \begin{cases} A(t - \alpha), & t > \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$$

y se emplea para modelar errores de medición que van incrementado linealmente su magnitud y perturbaciones que repentinamente empiezan a crecer a una **velocidad constante** de variación. Es importante entender que en la práctica toda señal es acotada; sin embargo, la rampa es una idealización muy conveniente que simplifica el análisis.

4. Rampa: Esta señal modela aquellas perturbaciones que repentinamente comienzan a crecer en magnitud con una aceleración constante. Se describe matemáticamente por

$$u^{(4)}(t) = A \frac{(t-\alpha)^2}{2} 1(t-\alpha)$$

$$u^{(4)}(t) = A \frac{(t-\alpha)^2}{2} 1(t-\alpha) = \begin{cases} \frac{A}{2}(t-\alpha), & t > \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$$

5. Sinusoide: La onda sinusoidal es el prototipo de señales periódicas. La selección de la frecuencia permite representar perturbaciones de baja frecuencia como también ruidos de medición de alta frecuencia. Esto es

$$u^{(5)}(t) = A \sin(\omega t)$$

con  $\omega > 0$ .

Estas señales básicas se muestran en la figura (9).

Y si las respuestas del sistema deben calcularse en el dominio de la frecuencia entonces el conjunto  $U_{test}$  se representa ahora por

$$= \left\{ \hat{u}^{(i)}(s) : i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

o sea,

$$\hat{U}_{test} = \left\{ A, \frac{A}{s}, \frac{A}{s^2}, \frac{A}{s^3}, A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

Sea  $P$  una planta lineal, invariante en el tiempo,

$$P : U \rightarrow Y : u \mapsto y = P[u]$$

descrita en variables de estados por  $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$ , esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde para cada  $t \geq t_0$ ,  $x(t) \in R^n$  denota el estado del sistema,  $u(t) \in R^{n_u}$  es el vector de entradas al sistema,  $y(t) \in R^{n_y}$  es el vector de salida del sistema.

Entonces, la trayectoria de estado de  $P$  como consecuencia de la aplicación de una entrada  $u(t)$  cuando  $P$  inicialmente se encontraba en el estado inicial  $x_0$  en  $t = t_0$ , está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t, t_0, x_0, u|_{[t_0, t]}) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= x_l(t) + x_f(t) \end{aligned}$$

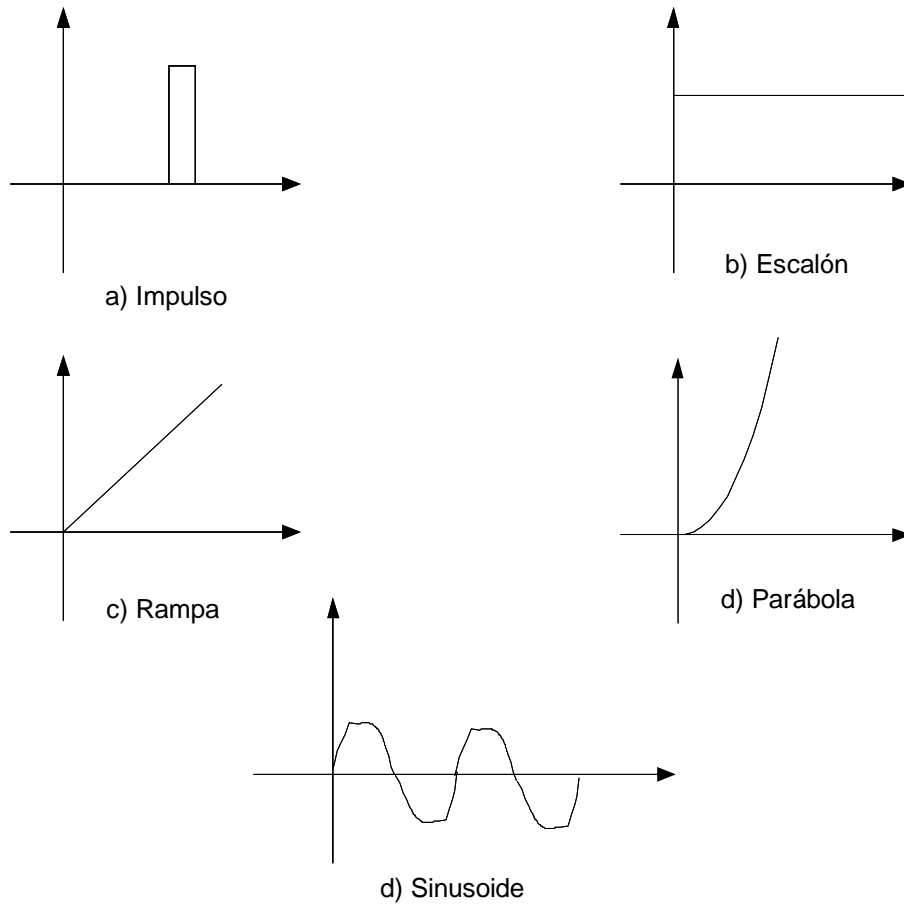


Figure 9: Modelos idealizados para señales de referencia, perturbacion y ruido

donde  $e^{At} = L^{-1} \left\{ (sI_n - A)^{-1} \right\}$  es la matriz transición de estados del sistema,  $x_l(t) = \varphi(t, t_0, x_0, 0)$  es la trayectoria libre (cero entrada) de estado del sistema

$$x_l(t) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

con  $t \geq t_0$ ,  $x_f(t) = \varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0, t]})$  es la trayectoria forzada del sistema (cero condiciones iniciales)

$$x_f(t) = \varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Por lo tanto, la salida o respuesta del sistema ante tal entrada y a tal condición inicial ses

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t)}) \\ &= Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ &= y_l(t) + y_f(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_0$ , donde

$$y_l(t) = \eta(t, t_0, x_0, 0) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \quad (4)$$

es la respuesta libre o transitoria del sistema  $P$ , y

$$y_f(t) = \eta(t, t_0, 0, u_{[t_0, t)}) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (5)$$

es la **respuesta forzada** debido a la entrada  $u(t)$  del sistema  $P$ .

Se recomienda usar este método en dos situaciones:

- Si el sistema no está inicialmente relajado ( $x_0 \neq 0$ ).
- Sistemas multivariables, o sea  $\min(n_u, n_y) > 1$ .
- Sistemas de dimensión grande (métodos numericos)

Por ejemplo, si se desea calcular la respuesta al impulso del sistema cuando la planta está inicialmente en reposo,  $x_0 = 0$ , usaremos la expresión para la respuesta forzada del sistema (5) y

$$\begin{aligned} h(t) &= \eta(t, 0^-, 0, \delta(t)) = \int_{0^-}^t Ce^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau + D\delta(t) \\ &= Ce^{At}B + D\delta(t) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

**Example 4** Considere una planta descrita por las siguientes ecuaciones de estados

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad -1 \quad 2] x(t) \\ x(0) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nos piden determinar la respuesta libre del sistema, y hallar la respuesta del sistema ante un escalón unitario. Y finalmente, hallaremos la respuesta al impulso del sistema.

**Solution 5** Sabemos que la transformada de Laplace de componente libre o trayectoria del estado es

$$L\{x_l(t)\} = (sI_n - A)^{-1} x_0$$

En nuestro caso

$$sI_3 - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

Y calculando la matriz resolvente:

$$(sI_3 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

y la correspondiente matriz transición de estados será

$$\begin{aligned} e^{At} &= L^{-1}\{(sI_3 - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L\{x_l(t)\} &= (sI_3 - A)^{-1} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} + \frac{1}{s^2+3s+2} - \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s^2+5s+6} + \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o sea

$$L\{x_l(t)\} = \begin{bmatrix} -\frac{4s+s^2+2}{(s+3)(s+2)(s+1)} \\ \frac{s+4}{(s+3)(s+2)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} =$$

Y hallando la antitransformada de Laplace se obtiene

$$x_l(t) = \varphi(t, t_0, x_0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

para  $t \geq 0$ . Por lo tanto, la respuesta libre del sistema puede calcularse de varias maneras. En primer lugar, se calcula  $y_l(t)$  aplicando la fórmula (4)

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \eta(t, t_0, x_0, 0) = C e^{A(t-t_0)} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-3t}, \end{aligned}$$

$t \geq 0$ .

La otra manera (recomendado cuando se realizan los cálculos manualmente.) es usando la relación

$$\begin{aligned} L\{y_l(t)\} &= C(sI_3 - A)^{-1} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4s+s^2+2}{(s+3)(s+2)(s+1)} \\ \frac{s+4}{(s+3)(s+2)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{3s+2}{(s+3)(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{1}{2(s+1)} - \frac{4}{s+2} + \frac{7}{2(s+3)} \end{aligned}$$

y antitransformando

$$y_l(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-3t},$$

para  $t \geq 0$  cuya gráfica se muestra en (5).

Es importante observar que el polinomio característico del sistema es

$$\chi_A(s) = \det(sI_3 - A) = (s+1)(s+2)(s+3)$$

por lo que los polos del sistema son

$$\text{poles}(P) = \{-1, -2, -3\}$$

y los correspondientes modos asociados a los respectivos polos son

$$\{e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}\}$$

por lo tanto, la respuesta libre del sistema (tanto del estado como de la salida) son combinaciones lineales de los modos del sistema y no depende de la entrada aplicada (ver figura(5))

Calculemos ahora, la respuesta forzada debido a la aplicación de un escalón unitario. Primero calcularemos la transformada de Laplace de la componente

forzada del estado

$$\begin{aligned}
 L\{x_f(t)\} &= (sI_n - A)^{-1} B \hat{u}(s) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} + \frac{1}{s^2+3s+2} \right) \\ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{s^2+5s+6} + \frac{1}{s+2} \right) \\ \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_f(s) &= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s(s+3)(s+2)(s+1)} \\ \frac{s+4}{s(s+3)(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} - \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{6(s+3)} + \frac{2}{3s} \\ \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3s} \\ \frac{1}{3s} - \frac{1}{3(s+3)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y antitransformando

$$x_f(t) = \varphi(t, t_0, 0, u_{[t_0, t)}) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-2t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

para  $t \geq 0$ .

Y la respuesta forzada del sistema será

$$\begin{aligned}
 y_f(t) &= \eta(t, t_0, 0, u_{[t_0, t)}) = Cx_f(t) \\
 &= [1 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-2t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} \\
 &= 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ , y cuya gráfica se muestra en la figura (10).

Finalmente la respuesta al impulso del sistema puede calcularse de distintas maneras. Dos de ellas son las siguientes:

a) Si conocemos la respuesta forzada de un sistema al escalón  $y_f(t)$ , entonces la respuesta al impulso por linealidad es

$$\begin{aligned}
 h(t) &= P[\delta(t)] = P\left[\frac{d}{dt}1(t)\right] \\
 &= \frac{d}{dt}P[1(t)] = \frac{d}{dt}y_f(t)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left( 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{2}{3} \right)$$

O sea,

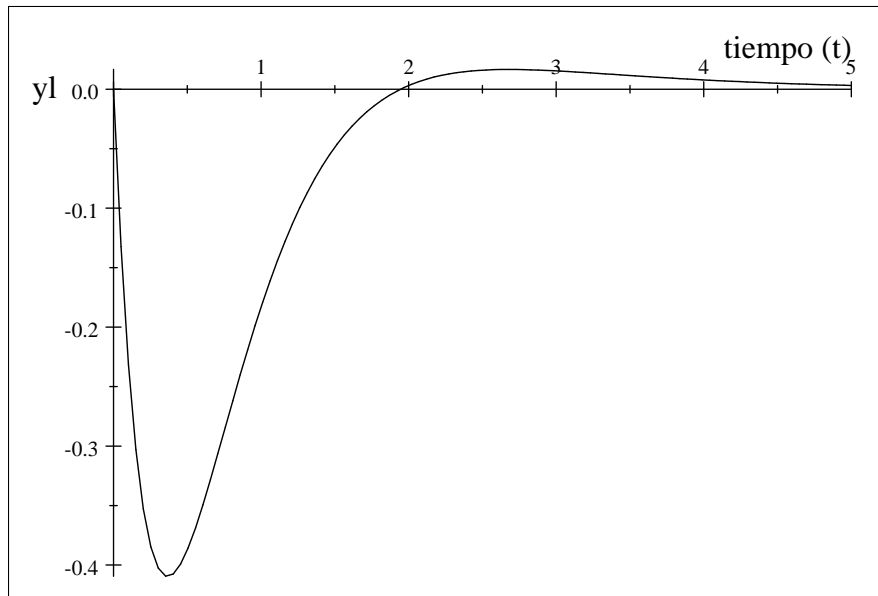
$$h(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-3t}$$

para  $t \geq 0$ .

b) Usando la expresión

$$\begin{aligned} h(t) &= Ce^{At}B + D\delta(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-3t} \end{aligned}$$

tal como habíamos calculado en la parte (a) y cuya gráfica se muestra en la figura (11)



*Respuesta libre del Sistema*

Supongamos entonces que se tiene una planta  $P$  escalar, invariante en el tiempo y de tiempo continuo,

$$y(t) = P[u(t)]$$

descrita por su función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$$



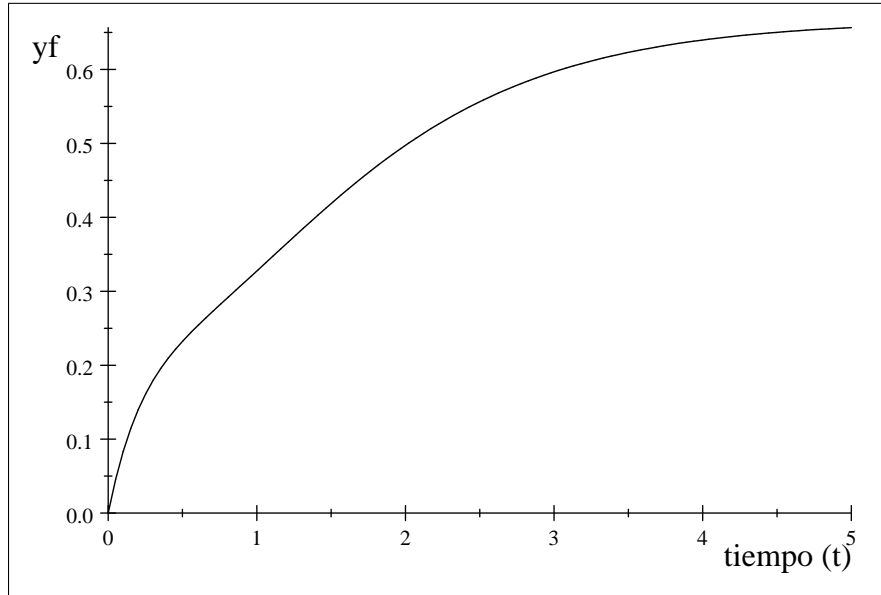


Figure 10: Respuesta Forzada del Sistema a una entrada escalón unitario

donde  $n_p(s), d_p(s) \in R[s]$ . Por ahora no haremos restricción alguna sobre los grados de los polinomios numerador y denominador de  $G_P(s)$ . Por lo tanto, aplicando el teorema de Euclides (o en lenguaje más coloquial dividiendo polinomios) es posible expresar  $G_P(s)$  como

$$G_P(s) = \frac{l(s)}{d_p(s)} + g(s)$$

donde ahora,  $\deg[d_p] > \deg[l(s)]$  y  $g(s) \in R[s]$ . Suponga además que los polos de la función de transferencia son distintos entre sí, o sea,

$$\text{Poles}[G_P] = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset C$$

con la condición  $i \neq j, p_i \neq p_j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Expandiendo en fracciones parciales (ver notas sobre polinomios), se obtiene

$$\hat{y}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + g(s) \right\} \hat{u}(s)$$

donde los coeficientes  $K_i$ 's son los restos de  $\frac{l(s)}{d_p(s)}$  en los polos  $p_i$ 's. Esto es,

$$K_i = \left\{ \frac{l(s)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (s - p_j)} \right\}_{s=p_i}$$

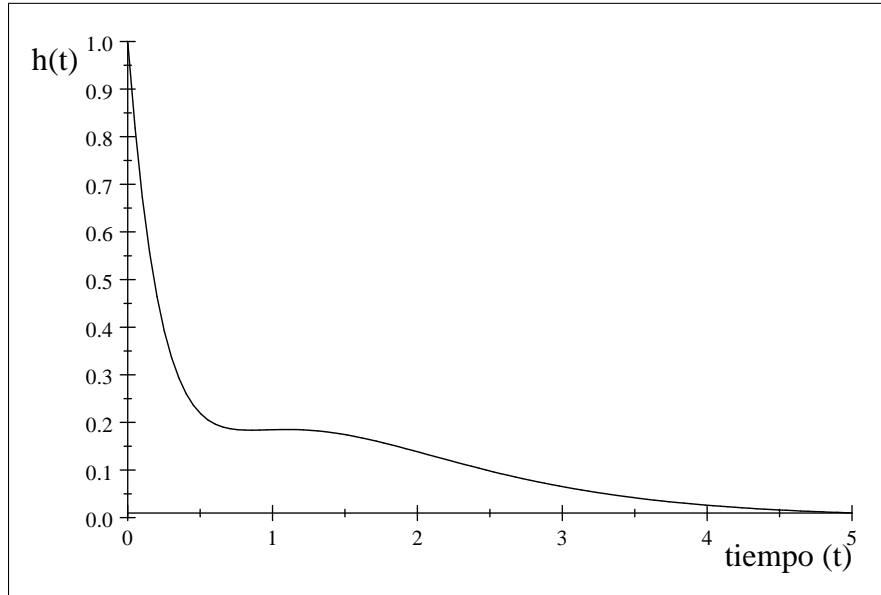


Figure 11: Respuesta al impulso

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Y tomando transformada inversa de Laplace cuando se aplica un impulso unitario,  $\hat{u}(s) = 1$ , se obtiene que la respuesta al impulso es

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + g(s) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + g(p) \delta(t) \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} g(q) &= \beta_v q^v + \beta_{v-1} q^{v-1} + \dots + \beta_1 q + \beta_0 \in R[q] \\ q &= \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

por lo que  $g(q) \delta(t)$  representa una combinaci3n lineal de derivadas de la se1al delta de Dirac. por lo tanto, la respuesta al impulso  $h(t)$  es una suma ponderada de sus modos  $\{e^{p_i t}\}_{i=1}^n$  tal como hab3amos visto en el ejemplo anterior.

Si cualquiera de los polos es complejo, esto es, si  $p_i = \sigma + j\omega$  para algun  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces ya que  $d_P(s)$  es un polinomio de coeficientes reales, entonces  $p_k = \sigma - j\omega$  (el complejo conjugado de  $p_i$ ) tambi3n debe ser un polo de  $G_P$ . M3s a3n, los respectivos restos  $K_i, K_k$  deben ser un par complejo conjugado,

y

$$\begin{aligned}
K_i e^{p_i} + K_k e^{p_k} &= (\gamma_i + j\rho_i) e^{\sigma_i + j\omega_i} + (\gamma_i - j\rho_i) e^{\sigma_i - j\omega_i} \\
&= 2e^{\sigma_i t} [\gamma_i \cos \omega_i - \rho_i \sin \omega_i] \\
&= 2\sqrt{\gamma_i^2 + \rho_i^2} e^{\sigma_i t} \cos\left(\omega_i t + \tan^{-1}\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right)\right)
\end{aligned}$$

y en consecuencia, la respuesta al impulso de un sistema dinámico siempre es una función real del tiempo.

**Example 6** Considere un sistema  $P$  descrito por su ecuación diferencial entrada-salida:

$$D_P(q)y(t) = N_P(q)u(t)$$

donde

$$\begin{aligned}
D_P(q) &= q^3 + 5q^2 + 11q + 15 \\
N_P(q) &= 7q^2 + 18q + 15
\end{aligned}$$

y suponemos que toda representación en variables de estados de  $P$  es detectable y estabilizable de tal manera que en el cálculo de la función de transferencia si existe cancelación de polos y ceros estos serán estables.

De la data se tiene que

$$G_P(s) = \frac{7s^2 + 18s + 15}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15} = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$$

y como  $G_P$  es estrictamente propia ( $\deg D_P \geq \deg N_P$ ), el polinomio  $g(s) = 0$ .

En consecuencia,

$$\frac{7s^2 + 18s + 15}{s^3 + 5s^2 + 11s + 15} = \frac{7s^2 + 18s + 15}{(s+3)(s^2 + 2s + 5)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{K_1}{s+3} + \frac{K_2}{s+1-2j} + \frac{K_3}{s+1+2j}$$

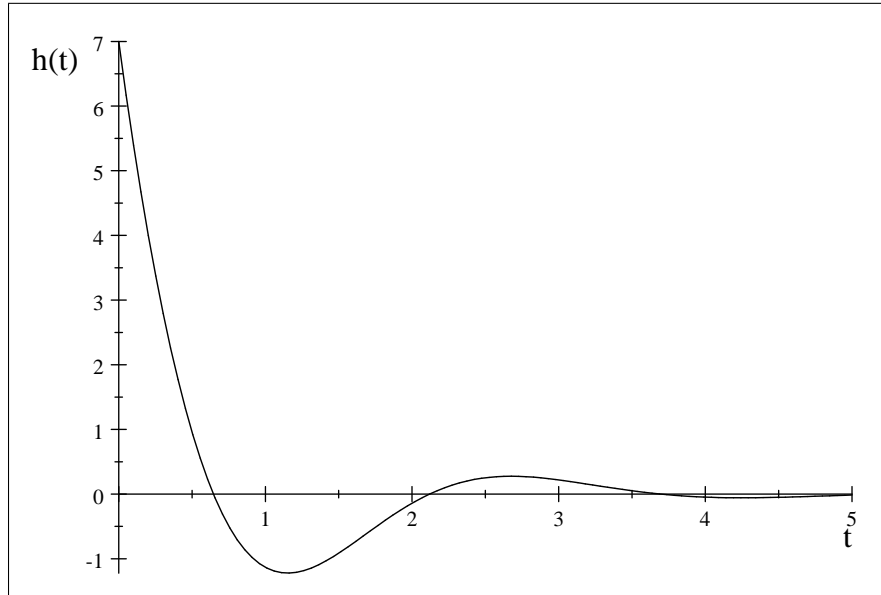
se obtiene

$$\frac{7s^2 + 18s + 15}{(s+3)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3}{s+3} + \frac{2+j}{s+1-2j} + \frac{2-j}{s+1+2j}$$

y

$$\begin{aligned}
h(t) &= L^{-1}\left\{\frac{3}{s+3} + \frac{2+j}{s+1-2j} + \frac{2-j}{s+1+2j}\right\} \\
&= 3e^{-3t} + (2+j)e^{(-1+2j)t} + (2-j)e^{(-1-2j)t} \\
&= 3e^{-3t} + 2\sqrt{5}e^{-t} \cos(2t + 0.464)
\end{aligned}$$

y cuya gráfica se muestra en (6)



Respuesta al Impulso de  $G_P(s) = \frac{7s^2+18s+15}{s^3+5s^2+11s+15}$

Supongamos ahora que se quieren emplear técnicas frecuenciales para calcular la respuesta a las diferentes señales de prueba arriba mencionada.

Por otro lado, cuando un sistema  $P$  inicialmente descrito por una representación en variables de estados,  $P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_x^n$  tal que: a)  $\{A, B\}$  es estabilizable, y b)  $\{A, C\}$  es detectable, entonces si el sistema está inicialmente en reposo y se somete a la influencia de una entrada  $u(t)$ , entonces la correspondiente salida

$$y(t) = L^{-1} \{G_p(s)\hat{u}(s)\}$$

donde

$$G_p(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = \frac{m(s)}{a(s)}$$

puede descomponerse en dos partes mutuamente exclusivas como ya hemos visto:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

La primera componente,  $y_l(t)$  es la respuesta libre, natural o transitoria del sistema y que consiste en una suma ponderada de los distintos modos del sistema, mientras que la segunda componenete,  $y_f(t)$ , es la respuesta forzada que consiste en los modos adicionales que están determinados por la entrada  $u(t)$ .

Suponga entonces que:

$$u(s) = \frac{m_u(s)}{p_u(s)}$$

donde en la mayoría de los casos,  $u \in \hat{U}_{test} = \left\{ A, \frac{A}{s}, \frac{A}{s^2}, \frac{A}{s^3}, A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\}$ .

Si además se cumple:

1. la transformada de Laplace de la salida  $\hat{y}(s)$  cumple con

$$\hat{y}(s) = G_p(s)\hat{u}(s) = \frac{m(s)}{a(s)} \frac{m_u(s)}{p_u(s)}$$

es estrictamente propia, o sea,

$$\begin{aligned} & \text{grad}[m(s)] + \text{grad}[m_u(s)] \\ & < \text{grad}[a(s)] + \text{grad}[p_u(s)], \end{aligned}$$

lo que quiere decir  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_p(s)\hat{u}(s) = 0$ .

2. los polinomios  $a(s)$  y  $p_u(s)$  son polinomios coprimos entre si (no tienen cero comunes). O sea

$$\text{gcd}(a(s), p_u(s)) = 1,$$

entonces es posible separar la componente libre y la forzada mediante el uso de fracciones parciales

$$y(s) = \underbrace{\frac{\hat{m}(s)}{a(s)}}_{y_l(s)} + \underbrace{\frac{\hat{m}_u(s)}{p_u(s)}}_{y_f(s)}$$

por lo tanto

$$y(t) = \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{\hat{m}(s)}{a(s)}\right\}}_{y_l(t)} + \underbrace{L^{-1}\left\{\frac{\hat{m}_u(s)}{p_u(s)}\right\}}_{y_f(t)}$$

con ambas  $y_l(s), y_f(s)$  estrictamente propias.

Es interesante observar que los polinomios  $\hat{m}(s)$  y  $\hat{m}_u(s)$  pueden calcularse de la forma siguiente:

$$\frac{\hat{m}(s)}{a(s)} + \frac{\hat{m}_u(s)}{p_u(s)} = \frac{\hat{m}(s)p_u(s) + \hat{m}_u(s)a(s)}{a(s)p_u(s)} = \frac{m(s)}{a(s)} \frac{m_u(s)}{p_u(s)}$$

donde  $\hat{m}(s), a(s)$  y  $\hat{m}_u(s), p_u(s)$  son polinomios conocidos.

O sea,  $\hat{m}(s)$  y  $\hat{m}_u(s)$  son las soluciones de la ecuación diofantina

$$\hat{m}(s)p_u(s) + \hat{m}_u(s)a(s) = m(s)m_u(s)$$

la cual bajo las condiciones establecidas tiene solución. (ver notas sobre polinomios.)

**Example 7** Sea  $P$  una planta descrita por su función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 90s + 80}$$

y queremos calcular la respuesta al escalón unitario,  $r(s) = \frac{1}{s}$ . Calcule la respuesta del sistema.

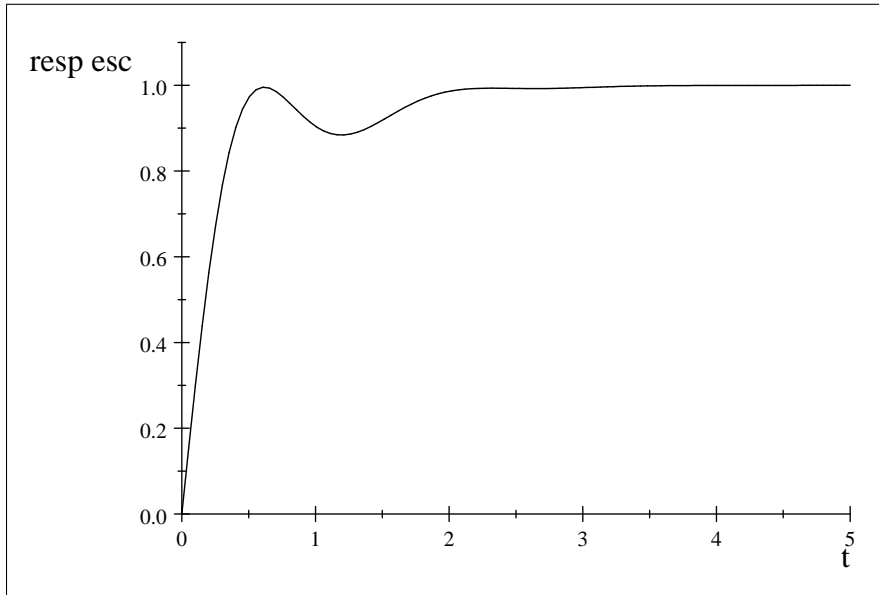
**Solution 8** En este caso,

$$\begin{aligned} m(s) &= 3s^3 + 25s^2 + 72s + 80 \\ a(s) &= s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{(s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80) s} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{3}{8(s+2)^2} - \frac{\frac{9}{16}s - \frac{1}{4}}{s^2 + 4s + 20} - \frac{7}{16(s+2)} \right\} \\ &= 1 - \frac{9}{16}e^{-2t} \left( \cos 4t - \frac{11}{18} \sin 4t \right) - \frac{3}{8}te^{-2t} - \frac{7}{16}e^{-2t} \end{aligned}$$

cuya gráfica se presenta en (8)



Respuesta al escalón del sistema con  $G_p(s) = \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80}$

Ilustremos ahora como podemos calcular la respuesta del sistema resolviendo la ecuación diofantina

$$\hat{m}(s)p_u(s) + \hat{m}_u(s)a(s) = m(s)m_u(s)$$

donde

$$\begin{aligned} p_u(s) &= s \\ m_u(s) &= 1 \end{aligned}$$

O sea, se requiere encontrar la solución polinómica de

$$\hat{m}_u(s) [s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80] + \hat{m}(s) [s] = 3s^3 + 25s^2 + 72s + 80$$

La matriz eliminante de los polinomios  $p_u(s)$  y  $a(s)$  es

$$R(a(s), p_u(s)) = \det \begin{bmatrix} 80 & 96 & 40 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 96 & 40 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 96 & 40 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 96 & 40 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 80$$

por lo tanto, el par de polinomios  $\{a(s), p_u(s)\}$  son coprimos sobre  $R[s]$ , por otro lado

$$\alpha = \Delta M_e^{-1}$$

donde

$$\Delta = [ 80 \quad 72 \quad 25 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]$$

y en consecuencia

$$\alpha = [ 80 \quad 72 \quad 25 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \begin{bmatrix} \frac{1}{80} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{80} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -80 & -96 & -40 & -8 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & 640 & 688 & 224 & 24 \\ 0 & 24 & -8 & 1 & -1920 & -1664 & -272 & 32 \end{bmatrix}$$

$$[ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -24 \quad -15 \quad -5 \quad -1 ]$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{m}_u(s) &= 1 \\ \hat{m}(s) &= -24 - 15s - 5s^2 - s^3 \end{aligned}$$

Por lo que la respuesta del sistema será

$$y(t) = y_i(t) + y_f(t)$$

donde

$$\begin{aligned} y_i(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{\hat{m}(s)}{a(s)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{-24 - 15s - 5s^2 - s^3}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80} \right\} \\ &= -\frac{7}{16}e^{-2t} - \frac{9}{16}e^{-2t} \left( \cos 4t - \frac{11}{18} \sin 4t \right) - \frac{3}{8}te^{-2t} \end{aligned}$$

mientras que la componente forzada será

$$\begin{aligned} y_f(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{\hat{m}_u(s)}{p_u(s)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Y la respuesta al escalón del sistema será

$$y(t) = -\frac{7}{16}e^{-2t} - \frac{9}{16}e^{-2t} \left( \cos 4t - \frac{11}{18} \sin 4t \right) - \frac{3}{8}te^{-2t} + 1$$

para  $t \geq 0$  tal como habíamos encontrado mediante el método de fracciones parciales.

#### 1.4 Respuestas Estables e Inestables

Tal como se ha demostrado, la respuesta al impulso de un sistema dinámico es una suma ponderada de sus modos  $e^{\lambda_i t}$ ,  $\lambda_i \in \text{polos}(P)$ . En consecuencia, la posición de los polos de un sistema dinámico en el plano complejo

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$$

$\sigma_i, \omega_i \in R$ , determinán la naturaleza del comportamiento dinámico de la respuesta al impulso.

Un polo  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  que se encuentra en el semiplano izquierdo

$$C_- = \{\lambda = \sigma + j\omega \in C : \text{Re}(\lambda) = \sigma < 0\}$$

es tal que el modo asociado a este

$$\begin{aligned} &= e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} \\ &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) \end{aligned}$$

cumple con

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mas aún, si  $e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_j t}$  son modos del sistema con  $\lambda_i, \lambda_j \in C_-$  y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para  $i \neq j$ , entonces si  $|\sigma_i| > |\sigma_j|$ , entonces  $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$  mas rápida que  $e^{\lambda_j t} \rightarrow 0$ . Por lo tanto, mientras mas lejo se encuentre el polo del eje  $j\omega$  mas rápido decaerá la contribución del polo en la respuesta al impulso  $h(t)$ . Por tal motivo, los modos correspondientes a aquellos polos en el semiplano izquierdo y el mismo polo se dicen ser **estables**. Un sistema con todos sus polos estables, y por lo tanto, su respuesta al impulso  $h(t)$  es una suma ponderada de modos que decaen con el tiempo, se denomina un **sistema estable**.



Por el contrario, si el sistema  $P$  tiene un polo  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in C_-$ , en cuyo caso el modo correspondiente será de la forma

$$e^{\lambda_i t} = \begin{cases} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)), & \sigma_i > 0, \\ \cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t), & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = \infty$$

y el modo crece desmesuradamente cuando  $\sigma_i > 0$ , e. En el primer caso se dice que tanto el modo como el polo son **inestables** y un sistema con al menos un polo inestable se dice ser un **sistema inestable**. También se observa, que mientras mas cerca al eje  $j\omega$  se encuentre un polo inestable, mas lentamente crecerá o tenderá el correspondiente modo a infinito.

Finalmente, si  $\text{Re}(\lambda_i) = \sigma_i = 0$ , entonces el modo oscila cuando y no converge a valor alguno en la respuesta al impulso presentándose el efecto que se denomina **estabilidad marginal**.

Los distintos tipos de estabilidad que hemos descrito y definido informalmente se ilustran en la figura (12).

## 1.5 Valores Iniciales y Finales de la Respuesta Temporal

### 1.5.1

Recuerde una de las propiedades mas importante de la Transformada de Laplace es la relacionada con el cálculo de los valores inicial y final de una señal  $f(t)$  a partir de su transformada de Laplace  $\hat{f}(s)$

$$\hat{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Específicamente,

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s\hat{f}(s))$$

y

$$f_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\hat{f}(s))$$

siempre que  $s\hat{f}(s)$  sea una función de transferencia estable en el sentido definido en el apartado anterior. Noten que para el cálculo del valor inicial no hay limitación alguna sobre los polos de la transformada de Laplace  $\hat{f}(s)$

**Example 9** *Aplicando el Teorema del Valor Final de la Transformada de Laplace, encuentre el valor final de la señal  $y(t)$  cuya transformada de Laplace está dada por*

$$\hat{f}(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

*Verifique el resultado tomando la transformada inversa de Laplace de  $\hat{f}(s)$  y suponiendo que  $t = \infty$ .*

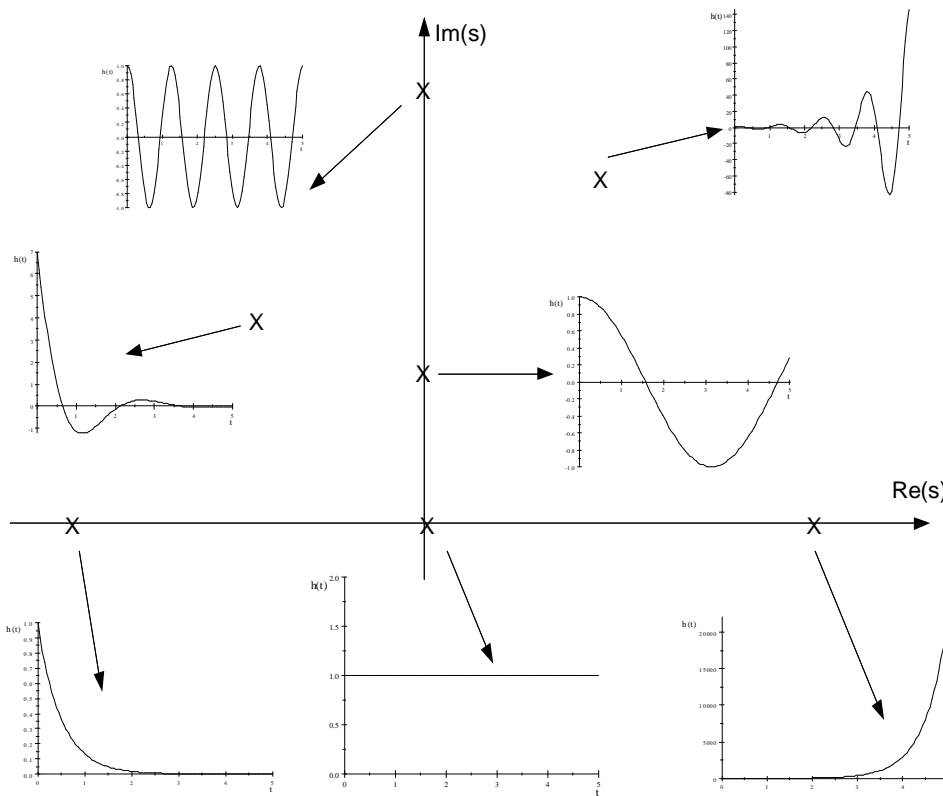


Figure 12: Distribución de polos en el plano complejo y forma de la respuesta al impulso

**Solution 10** Aplicando el teorema del valor final se observa que

$$sf(s) = \frac{10}{s+1}$$

cuyo único polo está en el semiplano izquierdo y, en consecuencia,

$$f_{ss} = \lim_{s \rightarrow \infty} (sf(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{10}{s+1} \right) = 10$$

Para verificar,

$$\hat{f}(s) = \frac{10}{s(s+1)} = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}$$

y antitransformando

$$f(t) = 10 - 10e^{-t}$$

para  $t \geq 0$ . por lo tanto,

$$f_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [10 - 10e^{-t}] = 10$$

## 1.6 Respuesta Temporal de Sistemas de Primer Orden

Considere un sistema o planta  $P$

$$y(t) = P[u(t)]$$

con  $t \in [0, \infty)$  e inicialmente relajado (cero energía inicial almacenada) descrito por su función de transferencia

$$G_P(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad (6)$$

y por lo tanto, la ecuación diferencial de entrada-salida del sistema

$$\frac{d}{dt}y(t) + py(t) = K \left[ \frac{du}{dt} + zu(t) \right]$$

Es evidente que este tipo de sistemas están completamente caracterizados por los parámetros  $\{p, z, K\}$  donde:

- $-p, -z$  representan al polo y cero del sistema respectivamente.
- $K$  es la ganancia del sistema.

Recuerden que la ganancia dc del sistema se define por

$$K_{dc} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

y en consecuencia,

$$K_{dc} = \frac{Kz}{p}$$

y tenemos varios casos:

### 1.6.1 Elemento inercial o red de atraso

Considere un sistema  $P$  cuyo comportamiento dinámicos está descrito por la ecuación entrada-salida

$$T \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = K_{dc}u(t)$$

donde  $K_{dc}$  es la ganancia dc y  $T$  es la constante de tiempo del sistema. En este caso se dice que el sistema es del tipo atraso o inercial, y es evidente que es un caso particular de (6) ya que

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ T &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

y la función de transferencia del sistema es

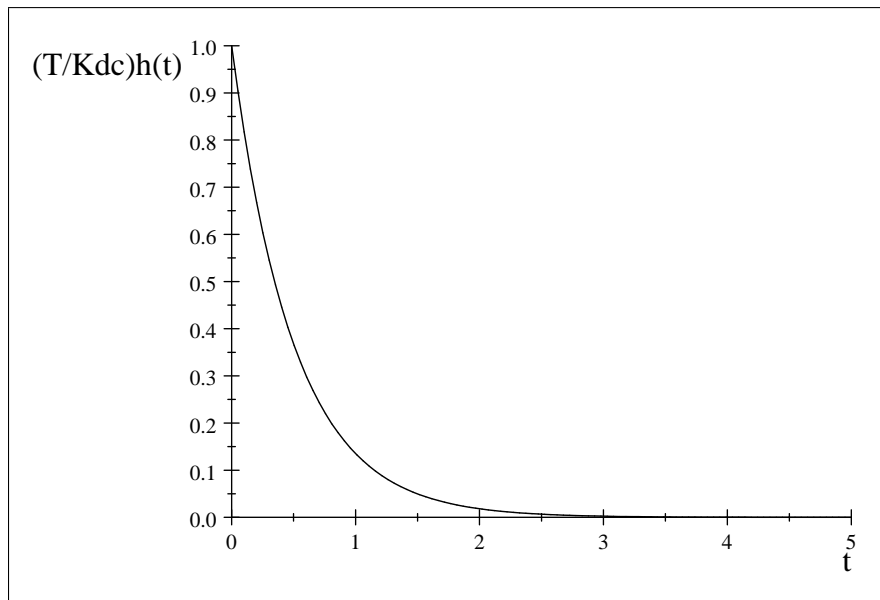
$$G_P(s) = K_{dc} \frac{1}{1 + sT}$$

y la correspondiente respuesta al impulso será

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\{G_P(s)\} = L^{-1}\left\{K_{dc} \frac{1}{1 + sT}\right\} \\ &= \frac{K_{dc}}{T} e^{-Tt} \end{aligned} \quad (7)$$

para  $t \geq 0$ .

Por lo tanto, la respuesta al impulso del sistema de primer orden consiste en una ampliación del modo del sistema  $e^{-Tt}$ . Y es evidente que el sistema será estable si  $T > 0$ , por lo que el polo  $-p = -\frac{1}{T}$  está en el semiplano izquierdo. La curva de respuesta obtenida mediante la relación (7) aparece en la figura (1.6.1)



Respuesta al escalón de un sistema de primer orden

Mientras que la respuesta al escalón será

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left[G_P(s) \frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left\{K_{dc} \frac{1}{(1 + sT)s}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}K_{cd} - T \frac{K_{cd}}{Ts + 1}\right\} \\ &= K_{dc}(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

De la fórmula deducida para la respuesta al escalón, se observa:

1. El valor final de la respuesta al escalón es

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{cd}(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \\ &= K_{dc} \end{aligned}$$

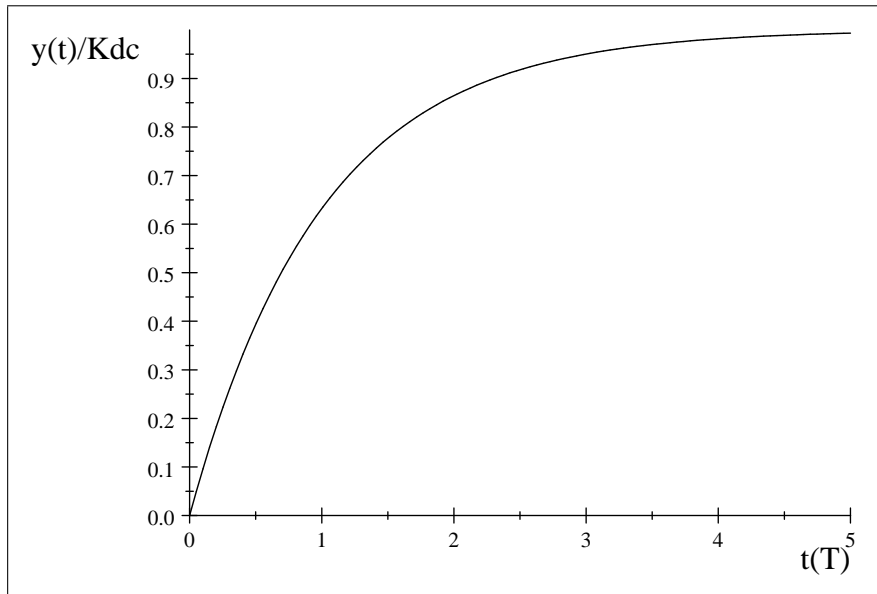
2. Al evaluar la respuesta al escalón en  $t = T$ ,

$$\begin{aligned} y(T) &= K_{cd}(1 - e^{-1}) \\ &= 0.632K_{cd} \\ &= 0.632y_{ss} \end{aligned}$$

Más aún, vemos que la respuesta al escalón es tal que

$t$	$T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$
$y(t)$	$0.632y_{ss}$	$0.865y_{ss}$	$0.950y_{ss}$	$0.982y_{ss}$	$0.993y_{ss}$

Por lo tanto, para  $t \geq 4T$ , la respuesta permanece dentro de la banda del 2% del valor final, o sea, a pesar que teóricamente para alcanzar el valor final hay que esperar infinitamente, desde el punto de vista práctico, el sistema de primer orden alcanza su valor en régimen permanente en cuatro constantes de tiempo. En resumen, se acepta que cuando el sistema entra en la banda del 2% del valor final (o valor en régimen permanente) este puede tomarse como el tiempo de respuesta tal como se aprecia en la figura (2).



Curva de la respuesta al escalón de un sistema inercial

Noten que a medida que la constante de tiempo,  $T$ , aumenta, el polo se desplazará sobre el eje negativo real (recuerde que el polo  $p = -\frac{1}{T}$ ) hacia el origen y la respuesta del sistema se hace más lenta. En general, si todos los polos de un sistema están en el semiplano izquierdo, mientras más lejos estén del origen, lo más "rápido" responde el sistema.

3. Si definimos como error de seguimiento a una señal  $r(t)$  dada como

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

entonces el correspondiente error en régimen permanente ante tal entrada  $r$  será

$$\begin{aligned} e_{ss}(r) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\hat{e}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [s(\hat{r}(s) - \hat{y}(s))] \end{aligned}$$

siempre que  $s\hat{e}(s)$  sea  $C_-$  - estable. Entonces, el error de seguimiento al escalón en régimen permanente será

$$\begin{aligned} e_{ss}(u^{(1)}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1(t) - y(t)) \\ &= 1 - K_{dc} \end{aligned}$$

y si queremos que  $|e_{ss}(u^{(1)})| < E_{\max}$ , entonces

$$|1 - K_{dc}| < E_{\max}$$

y debemos elegir o fijar la ganancia dc del sistema tal que

$$\begin{aligned} -E_{\max} &< 1 - K_{dc} < E_{\max} \\ -E_{\max} - 1 &< -K_{dc} < E_{\max} - 1 \end{aligned}$$

O sea,

$$1 - E_{\max} < K_{dc} < 1 + E_{\max}$$

4. Calculemos ahora la respuesta a la rampa de este tipo de sistemas y la cual está dada por

$$y(t) = L^{-1} \left\{ K_{dc} \frac{1}{(1 + sT)s^2} \right\}$$

y expandiendo en fracciones parciales

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left\{ -\frac{T}{s} K_{dc} + \frac{1}{s^2} K_{dc} + T^2 \frac{K_{dc}}{Ts + 1} \right\} \\ &= K_{cd} \left[ -T + t + T e^{-\frac{1}{T}t} \right] \end{aligned}$$

y antitransformando

$$y(t) = K_{dc} \left[ -T + t + T e^{-\frac{1}{T}t} \right]$$

para  $t \geq 0$ .

Y el correspondiente error en régimen permanente a la rampa será

$$\begin{aligned} e_{ss} \left( u^{(3)} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( u^{(3)}(t) - y(t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t - K_{dc} \left[ -T + t + T e^{-\frac{1}{T}t} \right] \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [K_{dc}T + (1 - K_{dc})t] \end{aligned}$$

y de inmediato, si  $K_{dc} \neq 1$ , entonces el límite crecerá desmesuradamente. Por lo tanto, aún si  $K_{dc} = 1$ , el error de seguimiento ante la rampa será constante e igual a

$$e_{ss} \left( u^{(3)} \right) = T$$

y mientras más pequeña sea la constante de tiempo menor será el error de seguimiento en estado estacionario después de la entrada "rampa",  $u^{(2)}$ .

Fianlemnte, este tipo de sistema nos permite "corroborar" una interesante propiedad de los sistemas lineales, invariantes en el tiempo y de tiempo continuo:

$$y(t) = P[u(t)] \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = P \left[ \frac{d}{dt}u(t) \right]$$

En otras palabras:

$$h(t) = P \left[ u^{(1)}(t) \right]$$

pero

$$u^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}u^{(2)}(t)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} h(t) &= P \left[ u^{(1)}(t) \right] = P \left[ \frac{d}{dt}u^{(2)}(t) \right] \\ &= \frac{d}{dt}P \left[ u^{(2)}(t) \right] \end{aligned}$$

O sea, la respuesta al impulso de un sistema es su derivada temporal de la respuesta al escalón. Y mas aún,

$$u^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}u^{(3)}(t)$$

o sea,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}P \left[ u^{(2)}(t) \right] \\ &= \frac{d}{dt}P \left[ \frac{d}{dt}u^{(3)}(t) \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt}P \left[ u^{(3)}(t) \right] \right) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}P \left[ u^{(3)}(t) \right] \end{aligned}$$

y podemos concluir en primer lugar, la respuesta al escalón del sistema es la derivada de su respuesta a la rampa, y en segundo lugar, la respuesta al impulso de un sistema es la segunda derivada de la respuesta a la rampa del sistema.

### 1.6.2 Elemento de Adelanto o diferenciador

Un sistema  $P$  descrito por la ecuación diferencial de entrada-salida

$$y(t) = K_{dc} \left( 1 + T \frac{d}{dt} u(t) \right)$$

se denomina elemento de adelanto o un diferenciador (P-D).

Tal sistema o elemento surge de la conexión en paralelo de un elemento proporcional y un elemento diferenciador. Por lo tanto, su función de transferencia es

$$G_P(s) = K_{dc}(1 + Ts)$$

y de inmediato, la respuesta al impulso será

$$h(t) = K_{dc}\delta(t) + K_{dc}T\delta^{(1)}(t)$$

la cual es una señal netamente impulsiva debido a que es la suma ponderada de un delta de Dirac y su derivada denominada "doblete".

Por otro lado, la respuesta al escalón será

$$y(t) = L^{-1} \left\{ K_{dc}(1 + Ts) \frac{1}{s} \right\}$$

o sea

$$y(t) = K_{dc}1(t) + K_{dc}T\delta(t)$$

y al igual que la respuesta al impulso es una señal impulsiva.

El error de seguimiento ante el escalón unitario de este sistema es

$$\begin{aligned} e_{ss}(u^{(1)}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1(t) - K_{dc}1(t) + K_{dc}T\delta(t)) \\ &= (1 - K_{dc}) \end{aligned}$$

el cual coincide con el error de seguimiento ante el escalón del sistema inercial.

Finalmente, la respuesta del sistema a una rampa unitaria será

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left\{ K_{dc}(1 + Ts) \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ K_{dc} \left( \frac{1}{s^2} + T \frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= K_{cd}(T + t) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .



Por lo tanto el error de seguimiento ante la entrada rampa unitaria es

$$\begin{aligned} e_{ss}(u^{(2)}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t - K_{cd}(T + t)] \\ &= -K_{dc}T - (1 - K_{dct})t \end{aligned}$$

y si  $K_{dc} \neq 1$ , el error en régimen permanente crecerá indefinidamente. Por el contrario, si la ganancia  $K_{dc} = 1$ , el error será constante

$$e_{ss}(u^{(2)}) = -T$$

Los mismos valores que en el caso del seguimiento ante el escalón del sistema inercial.

A pesar de lo extraño de ambas respuestas, no debemos despreciar este elemento o subsistema ya que, como se demostrará mas adelante, es de fundamental importancia para mejorar el desempeño de plantas mediante el uso de controladores PID.

### 1.6.3 Elemento Adelanto-Atraso (PI-PD real)

Considere en esta ocasión un sistema de primer orden  $P$  cuyo comportamiento dinámico está descrito por

$$y(t) + T_p \frac{d}{dt} y(t) = K \left( u(t) + T_z \frac{d}{dt} u(t) \right)$$

cuya función de transferencia es

$$G_P(s) = K \frac{(1 + T_z s)}{(1 + T_p s)}$$

el cual está caracterizado por los siguientes parámetros:

- Ganancia DC:

$$K_{dc} = \lim_{s \rightarrow 0} G_P(s) = K \frac{T_z}{T_p}$$

- El cero del sistema es  $z = -\frac{1}{T_z}$ ,
- El polo del sistema es  $p = -\frac{1}{T_p}$  y  $T_p$  es la constante de tiempo asociada al polo  $p$ .
- Defina el coeficiente

$$\tau = \frac{T_z}{T_p}$$

Si  $\tau < 1$ , entonces las propiedades del sistema se parecen a las de un integrador y a un elemento inercial. Si  $\tau > 1$ , entonces las propiedades del sistema tienden a ser similares a la de un diferenciador o elemento de adelanto. En realidad, ambos sistemas ( $\tau > 1$  o  $\tau < 1$ ) son de amplio uso ya que son potenciales candidatos a servir de unidades de control para un sistema dado o como implementación de un controlador Proporcional-Integral (PI) o Proporcional-Derivativo (PD).

**Example 11** Considere la función de transferencia de los circuitos eléctricos mostrados en la figura(13):

La función de transferencia en ambos casos será

$$G_P(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Para el circuito (a),

$$Z_1(s) = R_1, \quad Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{Cs} = \frac{1+CR_2s}{Cs}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} G_P(s) &= \frac{1 + CR_2s}{1 + C(R_1 + R_2)s} \\ &= K \frac{1 + sT_z}{1 + sT_p} \end{aligned}$$

donde

$$K = 1, \quad T_z = CR_2, \quad T_p = C(R_1 + R_2)$$

y noten que

$$\tau = \frac{T_z}{T_p} = \frac{CR_2}{C(R_1 + R_2)} < 1$$

por lo que la red (a) representa un sistema predominantemente de atraso.

Por otro lado, si se considera la red (b), se tiene que la función de transferencia sigue dando como

$$G_P(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

pero con

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{1+sCR_1}, \quad Z_2(s) = R_2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G_P(s) &= \frac{R_2 + CR_1R_2s}{(R_1 + R_2) + CR_1R_2s} \\ &= K \frac{(1 + T_zs)}{(1 + T_ps)} \end{aligned}$$

donde

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T_z = CR_1, \quad T_p = C \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

y noten que

$$\tau = \frac{T_z}{T_p} = \frac{CR_1}{C \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1,$$

y el circuito (b) implementa una red predominantemente diferenciadora.

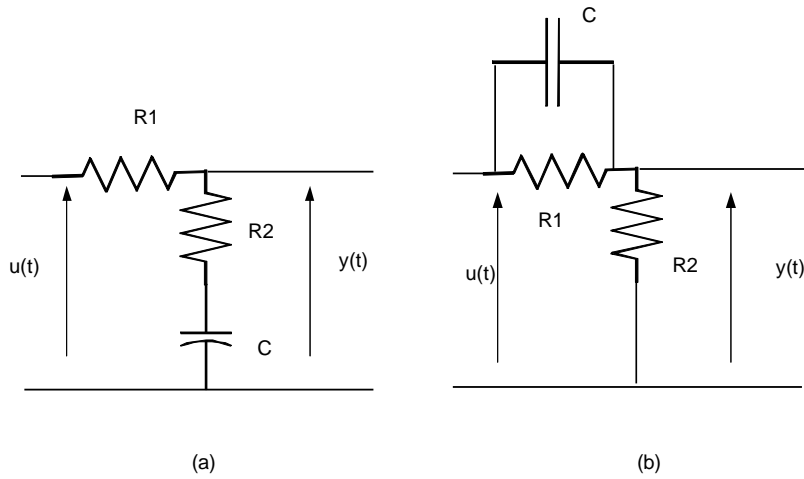


Figure 13: Ejemplo de elementos de adelanto-atraso

La respuesta al impulso de este sistema será

$$\begin{aligned}
 h(t) &= L^{-1} \left\{ K \frac{(1 + T_z s)}{(1 + T_p s)} \right\} \\
 &= K \left\{ \frac{T_z}{T_p} \delta(t) + \frac{(T_p - T_z)}{T_p^2} e^{-\frac{t}{T_p}} \right\}
 \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Por otro lado, la respuesta al escalón será

$$\begin{aligned}
 y(t) &= L^{-1} \left\{ K \frac{(1 + T_z s)}{(1 + T_p s)} \frac{1}{s} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K(T_p - T_z)}{sT_p + 1} \right\} \\
 &= K \left[ 1 - \frac{(T_p - T_z)}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} \right] \\
 &=
 \end{aligned}$$

$t \geq 0$ .

Notamos que en cualquiera de las situaciones:  $\tau > 1$  o  $1 < \tau$ , el error en régimen permanente ante el escalón unitario es

$$\begin{aligned}
 e_{ss}(u^{(1)}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - K \left[ 1 - (1 - \tau) e^{-\frac{t}{T_p}} \right] \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( (1 - K) - K(1 - \tau) e^{-\frac{t}{T_p}} \right) \\
 &= (1 - K)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única manera de disminuir  $e_{ss}(u^{(1)})$  es seleccionando la ganancia  $K$  lo mas cercano a la unidad.

## 1.7 Respuesta al escalón de sistemas de segundo orden u osciladores

Considere una planta  $P$  lineal, invariante en el tiempo e inicialmente relajado y descrito por su función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

el cual es de segundo orden y normalizado o estándar en el sentido que

$$G_P(0) = 1$$

y de la cual se asocian los siguientes parámetros:

- El factor de amortiguamiento

$$\sigma = \xi\omega_n$$

y puede interpretarse como la distancia de los polos al eje  $j\omega$ .

- La frecuencia natural de oscilación,  $\omega_n$ , y es la frecuencia a la que oscilará la respuesta al escalón de un sistema de segundo orden sin amortiguamiento ( $\sigma = 0$ ).
- El coeficiente de amortiguamiento se define como

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

- La constante de tiempo del sistema dada por

$$T = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

El polinomio característico de la función de transferencia  $G_P(s)$  es

$$a(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

y por lo tanto, los polos de  $G_P(s)$  serán

$$\text{polos}[G_P(s)] = \left\{ -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \right\}$$

cuya distribución de los polos en el plano complejo para distintos valores de  $\xi$  se muestra en la figura (??). Para  $\xi = 0$ , los dos polos son imaginarios puros, para

$\xi \in (0, 1)$  se tienen dos polos complejos conjugados y para  $\xi \geq 1$  los polos son reales.

Note que los polos de  $G_P(s)$  pueden expresarse como

$$p_{1,2} = \omega_n \left( -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

Por lo tanto, para un valor fijo frecuencia natural  $\omega_n$ , los polos de  $G_P(s)$  solamente dependen del factor de amortiguamiento  $\xi$ . Tal como  $\xi$  aumenta desde 0 hasta  $\infty$ , los polos se desplazan sobre una traza continua en el plano complejo, específicamente un semicírculo de radio  $\omega_n$  ya que

$$\begin{aligned} |p_{12}| &= \sqrt{\text{Re}^2(p_{12}) + \text{Im}^2(p_{12})} \\ &= \sqrt{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} \\ &= \omega_n \end{aligned}$$

que arranca en los polos  $\pm j\omega_n$  ( $\xi = 0$ ) y finaliza en  $-\omega_n$  ( $\xi = 1$ ) donde los dos polos convergen, esta traza se denomina el lugar geométrico de la raíz del sistema para  $\omega_n$  constante y  $\xi \in [0, 1]$ . Finalmente, para  $\xi \in [1, \infty)$  los polos se separan y se moverán sobre el eje real en direcciones opuestas hasta  $s = \infty$ .

De inmediato se identifican cuatro casos importantes correspondientes a la naturaleza de los polos y que determinarán el tipo de respuestas del sistema sumamente:

- Imaginarios Puros ( $\xi = 0$ )
- Raíces complejas y conjugadas ( $0 < \xi < 1$ ).
- Raíces reales e iguales ( $\xi = 1$ ).
- Raíces reales y distintas ( $\xi > 1$ ).

Por lo tanto la respuesta al escalón del sistema será:

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{\omega_n^2}{\left[ (s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] s} \end{aligned}$$

y expandiéndola en fracciones parciales

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{j(\psi-90^\circ)}}{s + \xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{j(-\psi+90^\circ)}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad (8)$$

donde

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

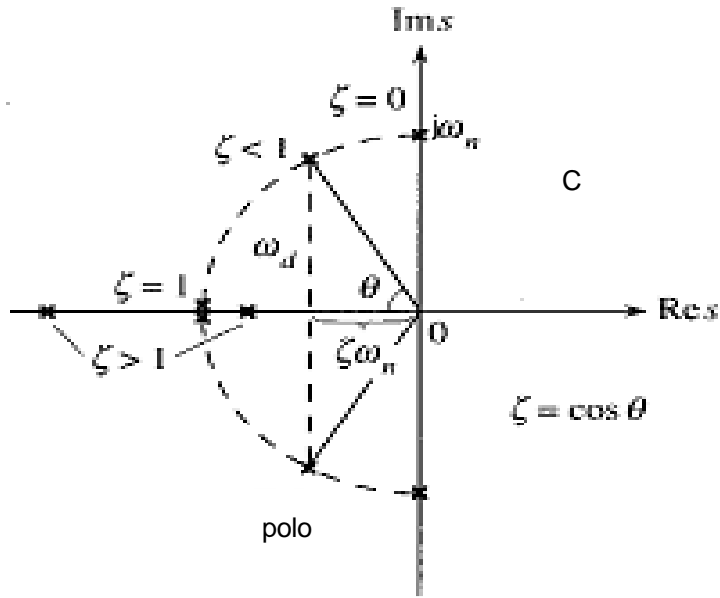


Figure 14: Distribución de los polos de un sistema de 2do. orden en el plano complejo  $C$

Ahora con esta expresión deduciremos la respuesta en cada uno de los casos planteados correspondientes a la posición de los polos en el plano complejo del sistema de segundo orden.

Calculemos la transformada inversa de Laplace de (8) para obtener

$$y(t) = 1 - \frac{-1}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{j(\psi-90^\circ)} e^{-(\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t} + \frac{-1}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{j(-\psi+90^\circ)} e^{-(\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) + \xi \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t - \theta\right) \end{aligned}$$

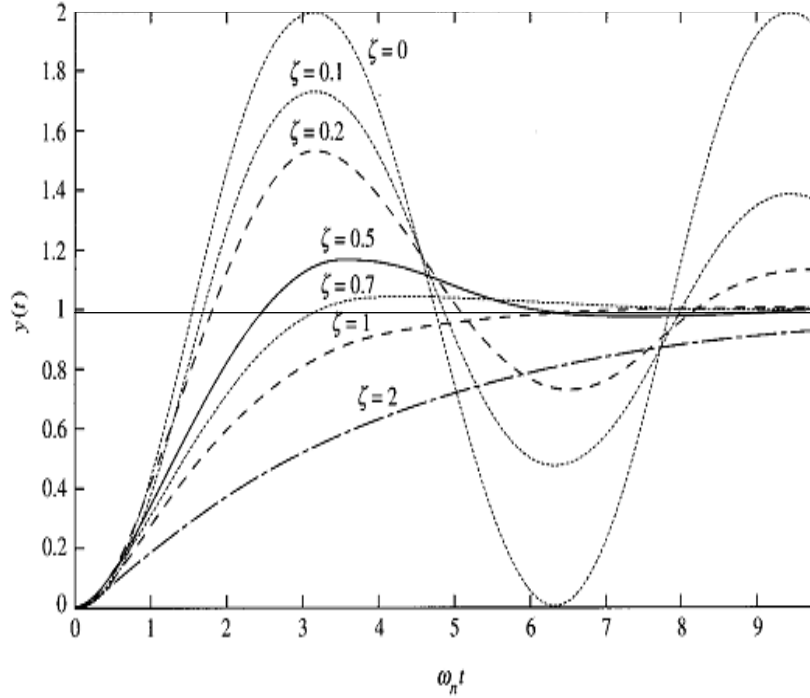


Figure 15: Respuesta al escalón de  $G_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

donde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{-\xi} \right) = \cos^{-1}(\xi)$$

En definitiva

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t - \theta)$$

Esta es la respuesta exacta cuando los polos son complejos conjugados, o sea, cuando el coeficiente de amortiguamiento  $\xi \in (0, 1)$ . en cuyo caso se dice que el sistema es **subamortiguado** y dicha situación se muestra en la figura (15).

El sistema es **críticamente amortiguado** cuando  $\xi = 1$ , y los polos son reales y coincidentes en el semiplano izquierdo, o sea,

$$p_{1,2} = -\omega_n = -\sigma$$

y la respuesta al escalón unitario será

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \\ &= 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \end{aligned}$$

para  $t \geq 0$ .

Por lo tanto:

$$y(t) : L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s \left( s + \omega_n \xi - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \left( s + \omega_n \xi + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \right\}$$

Si ( $\xi = 1$ ) entonces:

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{k_1}{(s + \omega_n)^2} + \frac{k_2}{(s + \omega_n)} + \frac{k_3}{s}$$

de donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega_n \\ k_2 &= 1 \\ k_3 &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y(t) = -\omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} + 1$$

para  $t \geq 0$ /

Si obtenemos la respectiva gráfica de  $y(t)$  se tiene:

Este tipo de respuesta se denomina **críticamente amortiguada**, y en control este tipo de sistema se considera demasiado lento.

Si ( $\xi > 1$ ) se tiene que:

$$y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{k_3}{s + \xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= \left( 2 \left( \xi^2 - \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right) \right)^{-1} \\ k_3 &= \left( 2 \left( \xi^2 + \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \left( 2 \left( \xi^2 - \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right) \right)^{-1} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_n t} + \\ &+ \left( 2 \left( \xi^2 + \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - 1 \right) \right)^{-1} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_n t}; (t > 0) \end{aligned}$$

A este tipo de respuesta se le denomina **Sobreamortiguada**, y en control rara vez se diseñan los sistemas para este tipo de respuesta, ya que son demasiados lentos.



Como podemos observar la constante de tiempo asociada a los polos

$$T = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega_n \xi}$$

por lo tanto, sistemas de respuestas rápida implica constantes de tiempo pequeña.

## 1.8 Parámetros de las Especificaciones de la Respuesta Transitoria

En muchos sistemas de control encontrados en la práctica, las características de desempeño deseadas se especifican *mediante* el uso de cantidades relacionadas con la respuesta temporal ante una señal escalón unitario  $1(t)$  debido a que su descripción matemática y generación es sumamente sencilla, y el cambio abrupto de nivel de señal que modela es lo suficientemente drástica que estimula o excita todos los modos observables y controlables del sistema. Por lo tanto, en teoría si se conoce la respuesta al escalón del sistema puede determinarse la respuesta de este ante cualquier otra señal factible  $u \in U$ . Esto último es cierto debido a que

$$h(t) = \frac{d}{dt} L^{-1} \left[ G_P(s) \frac{1}{s} \right]$$

donde  $h(t)$  representa la respuesta al impulso del sistema, y

$$y(t) = P[u(t)] = h(t) * u(t)$$

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico muestra con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

1. Tiempo de retardo,  $t_d$ .
2. Tiempo de subida,  $t_r$ .
3. Tiempo máximo o pico,  $t_p$ .
4. Sobreelongación o sobrepico,  $M_p$ .
5. Tiempo de asentamiento,  $t_s$ .

Estas especificaciones se definen a continuación y aparecen en forma gráfica en la figura (16).

1. **Máximo sobrepico** ( $M_p$ ): Se define como la máxima desviación de la salida con respecto a su valor final ( $y_{ss}$ ). Donde:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{valor en régimen permanente de } y(t)$$

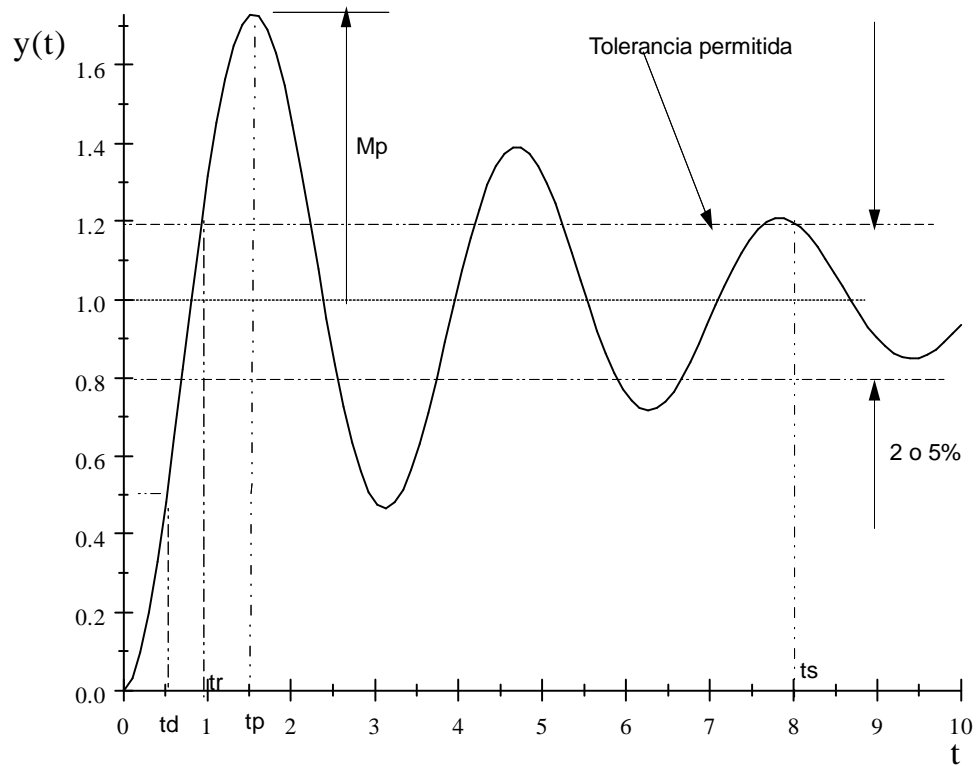


Figure 16: Curva de respuesta al escalón unitario y sus parámetro mas importantes

Generalmente, el máximo sobrepico se expresa en términos porcentuales, de modo que:

$$Mp(\%) = \frac{y_{\max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\% = \frac{M_p}{y_{ss}} \times 100\%$$

2. **Tiempo máximo o de pico** ( $t_p$ ): Tiempo en el cual ocurre el máximo sobrepico. O sea,

$$y(t_p) = \max_{t \in [0, \infty)} y(t)$$

3. **Tiempo de retardo** ( $t_d$ ), es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 50% de su valor final.

$$y(t_d) = 0.5y_{ss}$$

4. **Tiempo de subida ó levantamiento** ( $t_r$ ) es el intervalo de tiempo más

pequeño en el cual el sistema pasa del 10% al 90% de su valor final, o sea.

$$t_r = t_2 - t_1$$

donde  $t_1$  es el instante de tiempo  $t$  tal que

$$y(t_1) = 0.1y_{ss}$$

mientras que

$$t_2 = \inf_{\beta} \{t_{\beta} : y(t_{\beta}) = 0.9y_{ss}\}$$

5. **Tiempo de asentamiento** ( $t_s$ ) es el mínimo valor del tiempo a partir del cual la respuesta transitoria del sistema entra y permanece en una banda centrada en  $y_{ss}$  y de ancho  $2\varepsilon$  (con  $\varepsilon > 0$ ). Por lo tanto,

$$t_s = \inf \{t_{\alpha} : t > t_{\alpha} \rightarrow |y(t) - y(t_{\alpha})| < \varepsilon\}$$

En general el  $\varepsilon$  será de un 5% ó un 2% de  $y_{ss}$ .

Es interesante hacer las siguientes observaciones:

- El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control ya que dependerá de la tasa de decaimiento de la respuesta al escalón  $y(t)$ .
- Los tiempos ( $t_r, t_d, t_s$ ) se usan como medida cuantitativa de la rapidez de respuesta del sistema en el sentido de que mientras más pequeños sean estos valores el sistema responderá más rápido (o sea que alcanza su régimen permanente más rápido).
- El máximo sobrepico ( $M_p$ ) se emplea como una medida cuantitativa de la estabilidad relativa del sistema; si  $M_p$  es grande peor será la estabilidad relativa, es decir, será más oscilante. La magnitud de  $M_p$  nos indicará la presencia de polos en el sistema cercanos al eje  $j\omega$ .
- En general, es muy difícil deducir una fórmula analítica cerrada para cada uno de estos parámetros arriba definidos excepto en el caso de sistemas de segundo orden. Es por esta razón que sistemas de orden superior se aproximan mediante la técnica de polos dominantes por un sistema de segundo orden y poder expresar los criterios de diseño en términos de las constantes básicas del sistema normalizado ( $\xi, \omega_n$ ).

Procedamos entonces a calcular los parámetros de desempeño de la respuesta temporal al escalón para el sistema de segundo orden describiendo su función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sabemos que para el caso subamortiguado, la respuesta al escalón está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) + \xi \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t - \theta\right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) = \cos^{-1}(\xi) \end{aligned}$$

Por lo tanto para los sistemas de segundo orden se tiene lo siguiente:

1. Determinación del máximo sobrepico y tiempo pico,  $M_p$  y  $t_p$  :

En este caso solo basta resolver

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 = \frac{-\xi\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \theta) + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \omega_d \cos(\omega_d t - \theta)$$

donde la frecuencia de oscilación ( $\omega_d$ ) es :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

resolviendo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) &= 0 \\ \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t_m = m\pi$$

o sea

$$t_m = \frac{m\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

para  $m = 1, 2, 3, \dots$ . En consecuencia, el tiempo de ocurrencia del máximo sobrepico será cuando  $m = 1$ , o sea,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

De igual modo, también podemos obtener  $M_p$  ya que

$$\begin{aligned}
 y_{\max} &= y(t_p) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t_p + \theta\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \theta\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\pi + \theta) \\
 &= 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}
 \end{aligned}$$

y recordando que

$$\begin{aligned}
 M_p &= y_{\max} - y_{ss} \\
 &= 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - 1 \\
 &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 M_p\% &= \frac{y_{\max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\% \\
 &= 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\%
 \end{aligned}$$

cuya curva se presenta en la figura (1.8)

- De la respuesta al escalón (ver figura(15)) debe resultar claro que para determinar el tiempo de establecimiento empleando la formula analítica de esta será bastante complicado; mientras que es bastante sencillo usar una aproximación usando la envolvente de la senoide amortiguada.

De la la misma curva se deduce que es irrelevante usar la envolvente exponencial superior o inferior. Por lo tanto, solo se requier resolver

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_s} = 1 + \varepsilon \times 10^{-2}$$

o sea,

$$e^{\sigma\omega_n t_s} = \frac{100}{\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}$$

y tomando logaritmo

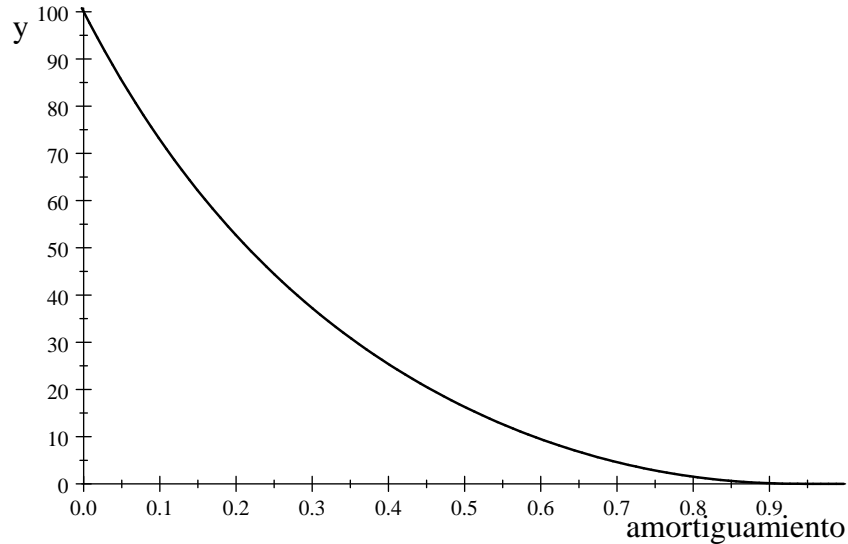
$$t_s = \frac{1}{\xi\omega_n} \ln\left\{\frac{100}{\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\right\}$$

Si  $\varepsilon = 2\%$  y si  $\xi < 1$ , entonces

$$\ln\left\{\frac{100}{\varepsilon\sqrt{1-\xi^2}}\right\} = \ln\left\{\frac{50}{\sqrt{1-\xi^2}}\right\} \approx 3.912$$

o sea, para  $0 < \xi < 1$

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n}$$



Máximo sobrepaso como una función del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$

Es evidente entonces que a medida que  $\xi$  disminuye, el máximo sobrepico  $M_p$  aumenta. Esto se interpreta que mientras mas cercano estén los polos al eje  $j\omega$ , mayor será la elongación y peor será la estabilidad relativa del sistema.

3 Las formulas precisas para  $(t_d, t_r, t_s)$ , son muy complicadas y por lo tanto se usan unas aproximaciones que han demostrado ser de suma utilidad tanto en el análisis como en el diseño de sisemas de control.:

- Para  $(0 < \xi < 1)$ (caso subamortiguado) se usan las siguientes aproximaciones:

$$t_d \approx \frac{1+0.7\xi}{\omega_n}$$

$$t_r \approx \frac{0.8+2.5\xi}{\omega_n}$$

- Para  $(\xi > 1)$ (caso sobreamortiguado) se usan las siguientes expresiones:

$$t_d \approx \frac{1+0.6\xi+0.15\xi^2}{\omega_n}$$

$$t_r \approx \frac{1+1.1\xi+1.4\xi^2}{\omega_n}$$

Revisando las expresiones para el tiempo de retardo, el tiempo de levantamiento o subida, y el tiempo de establecimiento, se observa que para pequeños valores de  $\xi$  se obtendrían pequeños valores del tiempo de subida y retardo; sin embargo, el tiempo de establecimiento sería grande. Esto nos dice que existe una situación de compromiso en los valores de  $\xi$  que deben seleccionarse para  $\xi$  para

poder cumplir satisfactoriamente los criterios de diseño que se fijan respecto a la respuesta temporal de sistemas de control. también es necesario considerar las implicaciones de estos valores en el máximo sobrepico el cual puede saturar los elementos finales de control o circuitos de potencia que forman parte de la planta. En la práctica se recomiendan valores

$$\xi \in [0.5, 0.8]$$

**Problem 12** El propósito de este problema tiene como objetivo comparar la respuesta al escalón de un sistema con un par de polos complejos dominantes versus la respuesta de sistemas sin polos dominantes.

1. Encuentre los polos de las siguientes funciones de transferencia. Grafique simultáneamente la respuesta al escalón y determine los parámetros ( $M_p, t_p, t_r, t_d, t_s$ ) de cada uno de los siguientes sistemas

$$G_1(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}; \quad G_2(s) = \frac{4s + 2}{s^2 + 2s + 2}; \quad G_3(s) = \frac{1}{2s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

2. El diagrama de Bode de un sistema de segundo orden normalizado con función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

para el caso subamortiguado se muestra en la figura(17) o sea, se representa

$$G_P(j\omega) = |G_P(j\omega)|_{dB} e^{j\text{Arg}G_P(j\omega)}$$

donde

$$|G_P(j\omega)|_{dB} = 20 \log [|G_P(j\omega)|]$$

Demuestre: a) que el pico de resonancia

$$M_r = \max_{\omega \in [0, \infty)} |G_P(j\omega)|$$

para  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  está dado por

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

y ocurre en la frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

b) La frecuencia de ancho de Banda del Sistema  $\omega_{BW}$  se define como aquella frecuencia a la cual se cumple con

$$|G_P(j\omega_{BW})|_{dB} = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G_P(j\omega_{BW})|_{dB} - 3dB$$

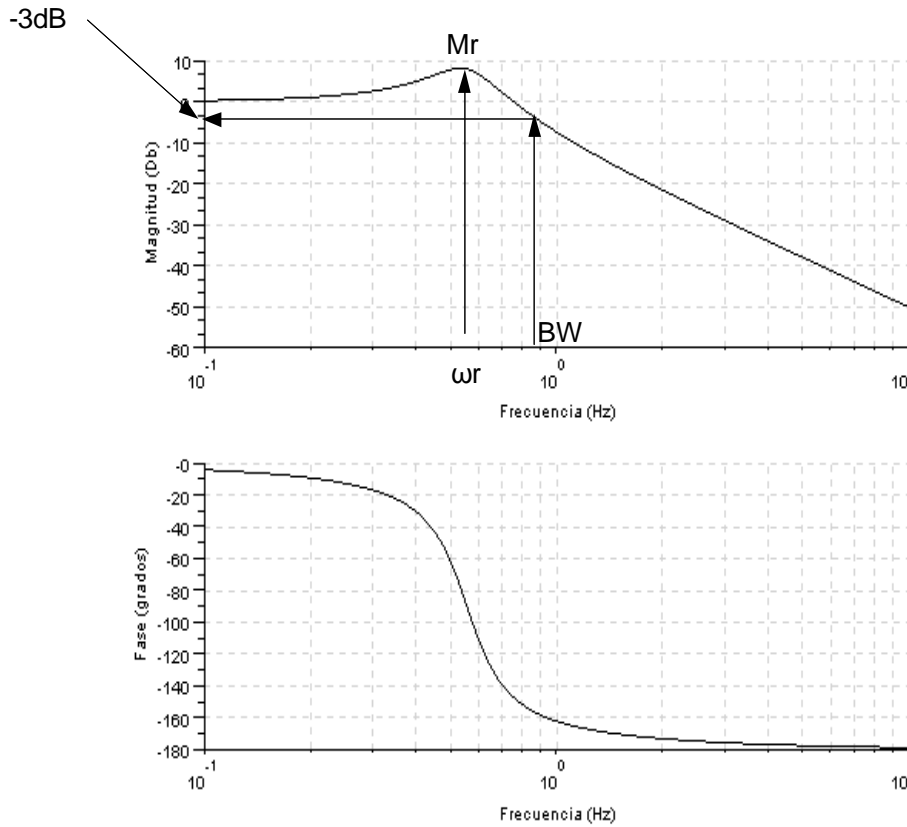


Figure 17: Bode de un sistema de segundo orden normalizado

y

$$\omega_{BW} = \omega_n \left[ 1 - 2\xi^2 + (2 - 4\xi^2 + 4\xi^4)^{1/2} \right]^{1/2}$$

Grafique simultaneamente el diagrama de Bode de amplitud de cada uno de los sistemas dados y determine los parámetros ( $M_r, \omega_r$ ).

c) Comente los efectos de añadir un cero (como en  $G_2$ ) o de un polo (como en  $G_3$ ) sobre los parámetros de las característica temporales y frecuenciales de los sistemas considerados.

**Problem 13** Considere un sistema  $P$  descrito por la siguiente ecuación Entrada-Salida

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = \frac{d}{dt}u(t) - u(t)$$



con condiciones iniciales

$$y(0^-) = a, \quad \dot{y}(0^-) = b, \quad u(0^-) = c$$

1. Encuentre la ecuación característica del sistema y los correspondientes polos. Diga si el sistema es asintóticamente estable.
2. Encuentre la función de transferencia del sistema y sus polos. Determine si el sistema es BIBO-estable.
3. Calcule la respuesta libre (entrada-cero) del sistema  $y_l$ .
4. Calcule la respuesta forzada (cero estado o  $CI's=0$ ) del sistema  $y_f$ .
5. Determine para cuales condiciones iniciales  $y_l \rightarrow 0$ . Concluya que para las otras condiciones iniciales,  $y_l \rightarrow \infty$ .
6. Explique la característica particular de este sistema que nos lleva a conclusiones que se contradicen en lo que se refiere a estabilidad.

**Problem 14** El objetivo de este problema es investigar los efectos de los ceros de fase no-mínima (ceros en el semiplano izquierdo). Un sistema con fase no-mínima son aquellos que tienen ceros en el semiplano derecho, Considere el sistema

$$G_P(s) = \frac{n(s)}{s^2 + 0.5s + 1.5}$$

1. Tome  $n(s) = 1.5$  y empleando las fórmulas deducidas para sistemas de segundo orden normalizados determine los valores de los parámetros ( $M_p, t_p, t_r, t_d, t_s$ ). Grafique la respuesta al escalón del sistema  $G_P$  y compare sus resultados.
2. Tome ahora  $n(s) = \frac{-s+\alpha}{\alpha}$ , encuentre la respuesta al escalón de  $G_P$  para  $\alpha \in \{1, 3, 6\}$ .
3. sea  $n(s) = \frac{s+\alpha}{\alpha}$ , encuentre la respuesta al escalón de  $G_P$  para  $\alpha \in \{1, 3, 6\}$ . Reporte su trabajo en dos gráficos y tabule sus resultados. En cada grafico de los apartados (2) y (3) debe aparecer la respuesta calculada en (1).
4. Basado en la data recolectada, ¿Cuáles son los efectos de polos en el semiplano derecho o en el semiplano izquierdo sobre la respuesta al escalón?. Observe que cuando el sistema tiene ceros en el semiplano derecho la respuesta al escalón va en dirección contraria inicialmente. Se puede demostrar que este fenómeno ocurre solo cuando el sistema tiene un número impar de ceros en el semiplano derecho.

**Problem 15** Para cada uno de los casos. determine y grafique en el plano-s, la región de estabilidad  $\Omega$  donde deben estar los polos de un sistema para que se cumplan las especificaciones exigidas.

1.  $\xi \geq 0.707, \omega_n \geq 2$  rad/seg.

2.  $0 \leq \xi \leq 0.707, \omega_n \leq 2 \text{ rad/seg.}$
3.  $\xi \leq 0.5, 1 \leq \omega_n \leq 5 \text{ rad/seg.}$
4.  $0 \leq \xi \leq 0.707, \omega_n \leq 5 \text{ rad/seg.}$

**Problem 16** Considere el sistema de control mostrado en la figura (18). Donde el controlador PD (Proporcional-Derivativo) esta descrito por

$$G_c(s) = K_P + K_D s,$$

y la planta  $P$  está representada por su función de transferencia

$$G_P(s) = \frac{100}{s^2}$$

Determine la función de transferencia del sistema a lazo abierto  $W_{ol}(s)$  y calcule sus polos y ceros. De igual manera, determine la función de transferencia del sistema a lazo cerrado y encuentre sus ceros y polos, compare los ceros y polos obtenidos en ambos casos. Comente su respuesta.

Construya un plano  $K_P$  vs  $K_D$  ( $K_P$  está en el eje vertical y  $K_D$  en el horizontal) y determine las siguientes regiones o trayectorias en dicho plano .

1. Región de estabilidad a lazo cerrado. (Use Routh-Hurwitz).
2. Trayectorias sobre las cuales la respuesta al escalón corresponde al caso críticamente amortiguado ( $\xi = 1$ ).
3. Región en la cual el sistema a lazo cerrado es sobreamortiguado ( $\xi > 1$ ).
4. Región en la cual el sistema a lazo cerrado es subamortiguado ( $\xi < 1$ ).
5. Trayectoria donde la constante de error a la parábola  $K_a = 1000 \text{ seg}^{-1}$ .
6. Trayectoria sobre la cual la frecuencia natural  $\omega_n = 50 \text{ rad/sec.}$
7. Trayectoria sobre la cual el sistema deja de ser controlable u observable. (Preste atención a la cancelación de polo-cero).

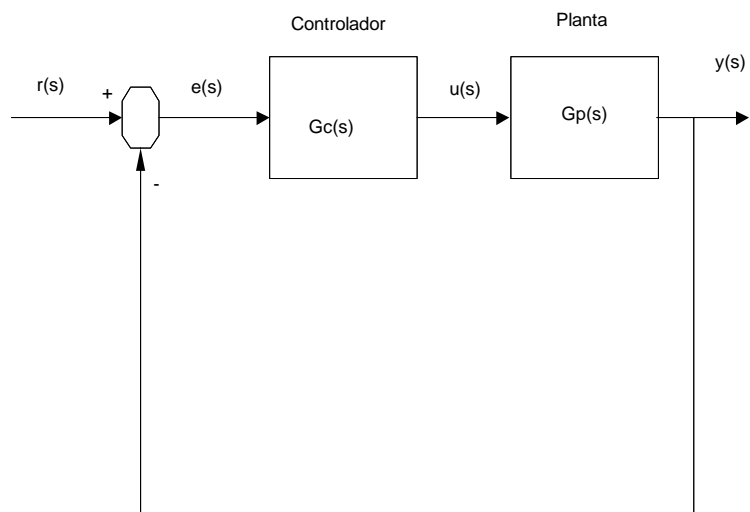


Figure 18: Sistema a lazo cerrado